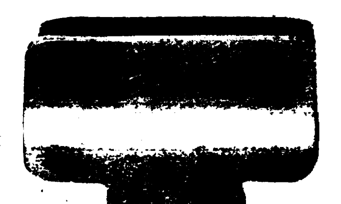
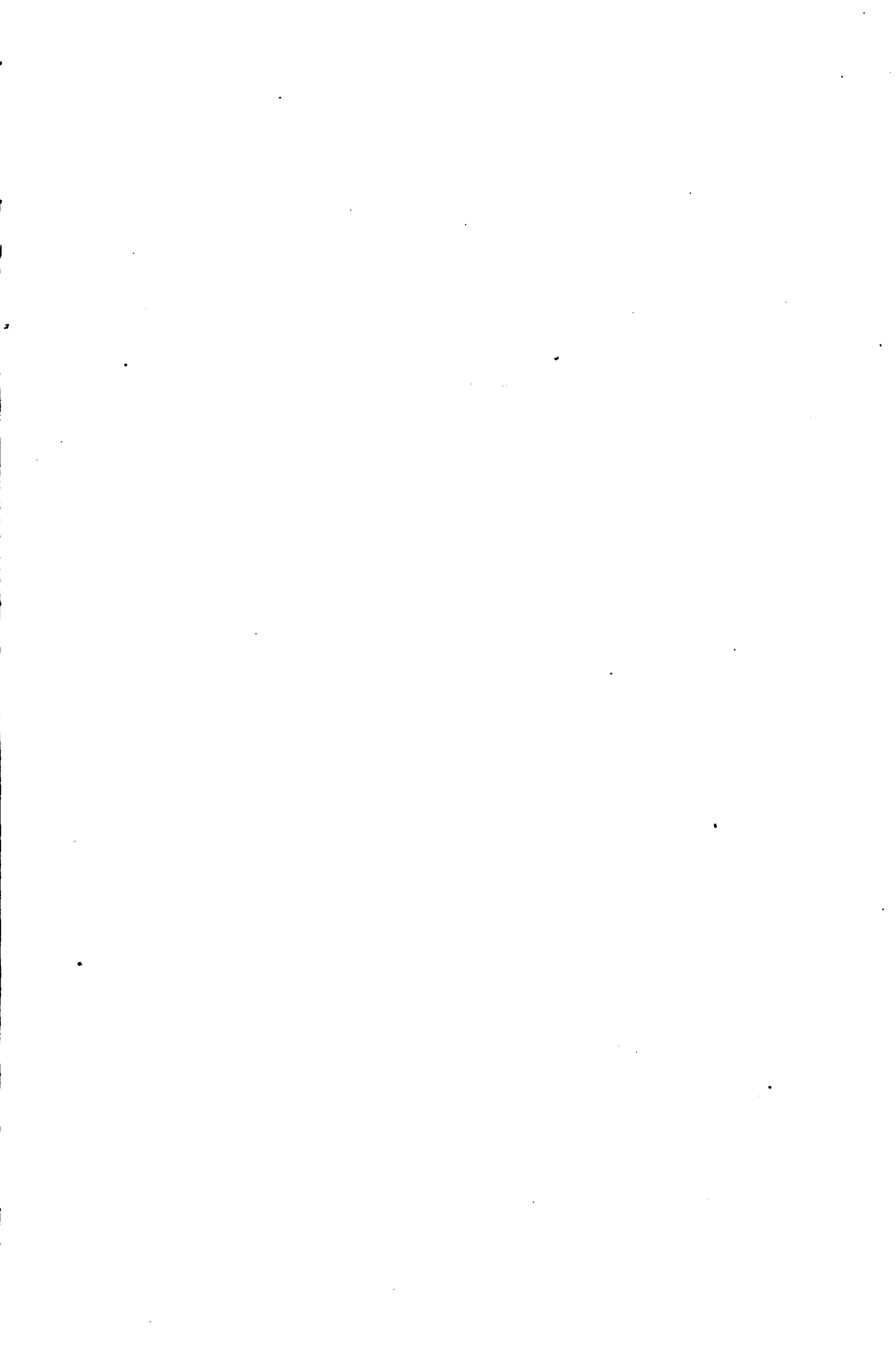




DR. FRIEDRICH HEINZERLING,

DREIECK UND KRAFTÜBERTRAGUNG.



DREIECK

UND

KRAFTÜBERTRAGUNG

IN

BAUKONSTRUKTIONSLEHRE UND BAUWESEN.

GRUNDZÜGE

EINER

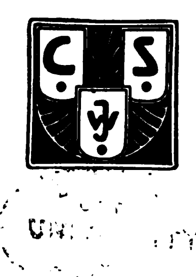
DYNAMO-STATIK DER BAUGEFÜGE

VON

DR. FRIEDRICH HEINZERLING,

KGL. GEH. REGIERUNGSRAT UND PROF. A. D. KGL. TECHN. HOCHSCHULE ZU AACHEN.

MIT 156 TEXTFIGUREN UND DREI FIGURENTAFELN.



CARL SCHOLTZE (W. JUNGHANS)

VERLAG FÜR ARCHITEKTUR, TECHNIK UND KUNSTGEWERBE

LEIPZIG 1904

Druck von Fr. Richter in Leipzig.

Vorwort.

Jedes Baugefüge erscheint, von außen betrachtet, im Zustande der Ruhe, während in dem Inneren desselben Kräfte wirken, welche von äußeren Kräften abhängen. Tritt eine Änderung dieser äußeren Kräfte nach Größe und Richtung ein, so ändern sich auch die inneren Kräfte. Die äußeren Kräfte werden auch als angreifende und die inneren Kräfte als widerstehende bezeichnet. Um den Ruhezustand herzustellen, müssen die widerstehenden Kräfte den angreifenden Kräften stets das Gleichgewicht halten. Die Herstellung dieses Gleichgewichtes in Baugefügen durch die widerstehenden Kräfte wird nach physikalischen Gesetzen durch Schwingungen ihrer kleinsten Teilchen veranlaßt, welche von den Angriffspunkten der äußeren Kräfte ausgehen und sich bis zu den Punkten fortpflanzen, an welchen die äußeren Kräfte durch die entsprechend widerstehenden Gegenkräfte aufgehoben werden. Hierbei entwickeln sich im Inneren der Baugefüge dynamische Vorgänge, welche deren Ruhezustand herbeiführen, aber von außen nicht erkennbar sind. Während nun die Statik sich nur mit dem statischen Gleichgewichtszustande der Baugefüge befaßt, soll sich die Dynamo-Statik auch mit denjenigen dynamischen Vorgängen beschäftigen, welche sich im Inneren des Baugefüges entwickeln müssen, um das statische Gleichgewicht herzustellen. Hierbei veranlassen die äußeren Kräfte durch Störungen des Ruhezustandes der kleinsten Teilchen Schwingungen im Inneren der Bauteile. Durch diese Schwingungen werden die einzelnen Teile der Baugefüge schließlich in diejenige Spannung versetzt, bei welcher ihr Ruhezustand wieder hergestellt wird. Die nachfolgenden Untersuchungen gelten dem Zusammenhange dieser Vorgänge und bilden einen Versuch zur Begründung einer dynamischen Statik der Baukonstruktionen.

Da nun die dynamischen Vorgänge in dem Inneren fester Körper die Herstellung des statischen Gleichgewichtes erklären,

also die Gesetze der Statik bestätigen müssen, so erscheinen umgekehrt manche statische Ermittelungen geeignet, über dynamische Vorgänge im Inneren von Körpern Licht zu verbreiten oder sie wenigstens in einer faßlicheren Weise darzustellen. Da nämlich die Wirkungen der Schwingungen Spannungen, also die Ergebnisse jener inneren Bewegungen schließlich statische Zustände sind, so folgt, daß aus der Darstellung mancher statischer Zustände auf diejenigen inneren Bewegungsvorgänge geschlossen werden kann, welche jene statischen Zustände hervorgerufen haben.

Möchten die nachfolgenden Anschauungen und vorläufigen Untersuchungen in Fachkreisen eine wohlwollende Aufnahme finden und dazu beitragen, das in denselben behandelte schwierige Gebiet einer Dynamo-Statik der Baugefüge zu erweitern und zu vertiefen.

Zur angenehmen Pflicht gereicht es mir, meinem Assistenten, Herrn Bauingenieur A. Striepling, für die bei der Bearbeitung der vorliegenden Schrift geleistete Beihilfe, sowie der Verlagsbuchhandlung für die sorgfältige Herstellung von Text und Tafeln meinen verbindlichen Dank auszusprechen.

Aachen, im Juni 1904.

Der Verfasser.

Vorbemerkung. Zur Vereinfachung und zur Förderung deutscher Ausdrucksweise sind in nachstehenden Ausführungen gewählt die Bezeichnungen:

Längsschwingungen für Longitudinalschwingungen,
Querschwingungen für Transversalschwingungen,
Kleinste Teilchen für Moleküle,
Kleinste Schichten für Molekülschichten,
Baugefüge für Baukonstruktion,
Stabgefüge für Stabkonstruktion,
Halbmesser für Radius,
Durchmesser für Diameter
Vieleck für Polygon,
Gegenkraft (Gegendruck, Gegenzug) für Reaktion,
Wagrechte Kraft für Horizontalkraft,
Lotrechte Kraft für Vertikalkraft,
Seitenkraft für Komponente
Mittelkraft für Resultante,

Längskraft, parallel zur Längenachse eines Stabes wirkende Kraft, für Longitudinalkraft,
Querkraft, rechtwinklig zur Längenachse eines Stabes wirkende Kraft, für Transversalkraft,
Längsspannung (Druckspannung, Zugspannung), parallel zur Längenachse eines Stabes erzeugte Spannung, für Longitudinalspannung,
Querspannung, rechtwinklig zur Längenachse eines Stabes erzeugte Spannung, für Transversalspannung,
Dehnung für die Verlängerung eines Stabes über seine ursprüngliche Länge,
Stauchung für die Verkürzung eines Stabes unter seine ursprüngliche Länge,
Anziehungskraft für Attraktionskraft,
Schwingungsweite für Amplitude,
Schwingung für Oscillation,
Schwingungszustand für Schwingungsphase,
Versuch für Experiment,
Gleichartig für homogen,
Gleichdauernd, von gleicher Dauer, für isochron,
Festpunkt e. O. für Festpunkt erster Ordnung,
Festpunkt n. O. für Festpunkt niederer Ordnung,
Rechnerisch für analytisch,
Zeichnerisch für graphisch,
Zahl für Nummer,
Zahlenmäßig für numerisch,
Baustoff für Baumaterial,
Rauminhalt für Volumen,
Nutzquerschnitt für Nettoquerschnitt,
Vollquerschnitt für Bruttoquerschnitt,
Unterschied für Differenz,
Formänderungsarbeit für Deformationsarbeit,
Querschnittsminderung für Querkontraktion,
Querschnittsmehrung für Querdilatation,
Gleichwerte für Äquivalente,
Abmessungen für Dimensionen.

Literatur.

In alphabetischer Reihenfolge der Verfasser.

Bach, Elasticität und Festigkeit. Stuttgart 1894.

Bauschinger, Mitteilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium der technischen Hochschule zu München.

Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques. Turin 1879.

Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862.

Cullmann, Die graphische Statik. 2. Aufl. Zürich 1875.

Engesser, Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Berlin 1892.

Fränkel, Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben.

Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit. 2. Aufl. Berlin 1878.

Heinzerling, Ein Beitrag zur Begründung einer allgemeinen Theorie und Systemkunde der Baukonstruktionen. Civilingenieur, Bd. XIV und XVI. Leipzig 1870.

— Angreifende und widerstehende Kräfte der Brücken- und Hochbaukonstruktionen. Zweite Auflage. Berlin 1876.

— Grundzüge der konstruktiven Anordnung und statischen Berechnung der Brücken- und Hochbaukonstruktionen. II. Teil. 1. u. 2. Heft. Leipzig 1873/4.

— Steife doppelte Spreng-, Häng- und Hängsprengwerke im Holzbrückenbau. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. Bd. 2. Vierte Auflage.

Launhardt, Die Beanspruchung des Eisens. Deutsche Bauzeitung. Berlin 1873.

Maxwell, On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames.

Mohr, Beiträge zur Theorie des Fachwerks.

Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen. 2. Auflage. Leipzig 1887 und 1892.

Rebhann, Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Wien 1856.

Ritter, A., Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen. Hannover 1870.

— Höhere Mechanik. Leipzig 1885.

Schmitz, A., Untersuchungen über Zugfestigkeit, Dehnung und elastisches Verhalten von Eisen- und Stahlstäben. Berlin 1903.

Tetmayer, Mitteilungen aus der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidgen. Polytechnikum in Zürich.

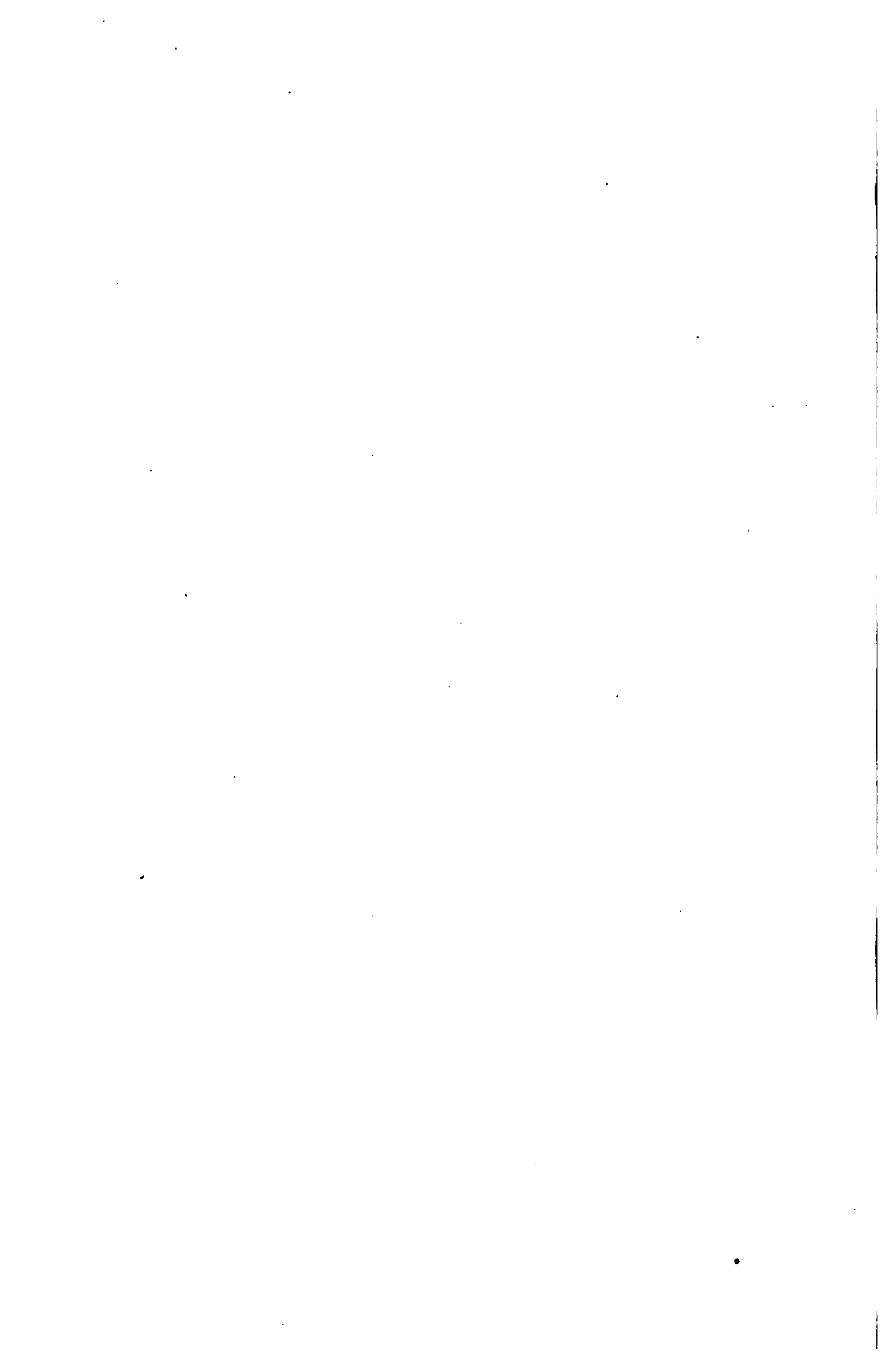
Weyrauch, Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahlkonstruktionen. Leipzig 1876.

Winkler, Vorträge über Brückenbau. Eiserne Brücken. Heft 2. Wien 1875.

Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. Aufl. Leipzig 1895.

Inhalt.

Tafeln.





Einleitung.

Die Anordnung eines Baugefüges soll dessen Bestand durch die möglichste Unverschieblichkeit im Ganzen und in seinen einzelnen Teilen sichern. Die wenigst verschiebliche Anordnung ergibt das Stabdreieck für sich oder in seiner Zusammensetzung zu Stabgefügen. Ein Stabdreieck bedarf mindestens zweier Festpunkte erster Ordnung (Stützpunkte), um einen Festpunkt zweiter Ordnung anschließen zu können. Ein aus zwei oder mehr Stabdreiecken zusammengesetztes Stabgefüge bedarf ebenfalls mindestens zweier Festpunkte erster Ordnung (Stützpunkte), um mehrere Festpunkte niederer, also zweiter, dritter und mehrfacher Ordnung anschließen zu können.

Die Stabdreiecke und die aus Stabdreiecken zusammengesetzten Stabgefüge übertragen die auf sie einwirkenden äußeren Kräfte auf ihre Festpunkte niederer und erster Ordnung mittelst Schwingungen ihrer kleinsten Teilchen, deren Fortpflanzungsweg sich von den Angriffspunkten der äußeren Kräfte bis zu den Festpunkten erster Ordnung erstreckt und von der Form des Stabdreieckes oder des Stabgefüges abhängt. Je nachdem jene äußeren Kräfte Längskräfte oder Querkräfte und die ersteren entweder Zugkräfte oder Druckkräfte sind, nehmen jene Fortpflanzungswege verschiedene Formen an. Die letzteren werden überdies verändert, wenn Längs- und Querkräfte gleichzeitig auf ein Stabdreieck oder auf ein Stabgefüge einwirken.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit jener Schwingungen der kleinsten Teilchen ist nur von der Elasticität und der Dichtigkeit des angewandten Stabstoffes abhängig und ergibt die Zeit, innerhalb welcher die äußeren Kräfte durch die Stabgefüge auf ihre Festpunkte erster Ordnung übertragen werden.

Die Fortpflanzung jener Schwingungen der kleinsten Teilchen von einem Stabe zu dem anderen erfordert eine Verbindung aller Stäbe untereinander, welche wieder von der Zerlegung jener Schwingungen in den einzelnen Festpunkten abhängt. In den Festpunkten erster Ordnung (Stützpunkten), wohin die äußeren Kräfte durch die Schwing-



ungen in den Stabgefügen übertragen werden, müssen die letzteren durch Gegenschwingungen aufgenommen werden, welche die gleichen Gegenkräfte erzeugen und somit das Gleichgewicht in dem ganzen Baugefüge durch Vermittelung seiner Unterstützung durch Lager herstellen.

1. Geringste Zahl der Festpunkte.

Wird ein Stab durch eine Kraft oder eine Last P auf Zug oder Druck angegriffen, deren Richtung mit seiner Längenachse zusammenfällt, so bedarf der Stab nur eines festen Stützpunktes 1, s. Fig. 1 und 2.

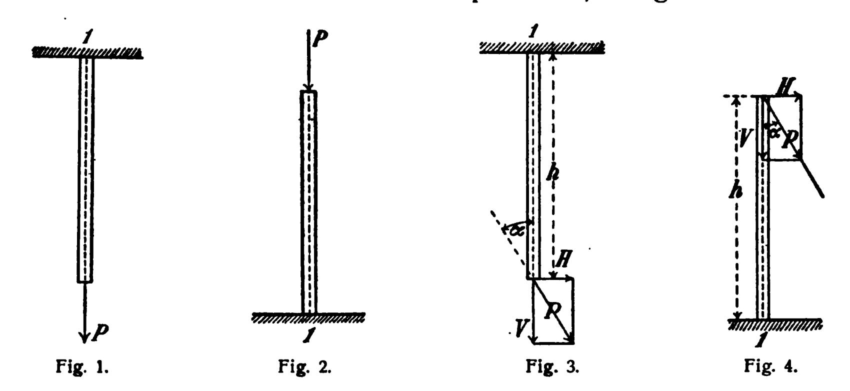


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Wirkt die Kraft dagegen unter einem Winkel α zur Stabachse, s. Fig. 3 und 4, so nimmt der Stab nur die Seitenkraft $V = P \cos \alpha$ auf, während die Seitenkraft $H = P \sin \alpha$ den Stab um seinen unteren Stützpunkt 1 mit dem Momente $H \cdot h$ zu drehen sucht. Dieser Drehung wird vorgebeugt durch Annahme eines zweiten Festpunktes I. Ganz dasselbe gilt für einen wagrechten oder geneigten Stab mit einem Stützpunkt 1, s. Fig. 5, der von einer Kraft P unter einen Winkel α

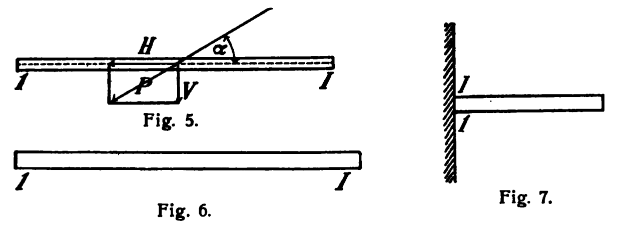


Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

zu seiner Längsachse angegriffen wird. Wenn derselbe nicht von der Kraft $P \sin \alpha$ gedreht werden soll, so bedarf er ebenfalls eines zweiten Stützpunktes I. Alle Stäbe, die von solchen, zu ihrer Längsachse geneigten Kräften angegriffen werden, bedürfen daher mindestens je

zweier Stützpunkte. Liegen dieselben nebeneinander, s. Fig. 6, so erhält man einen Balkenträger, liegen dieselben übereinander, s. Fig. 7, so erhält man einen Kragträger. Man unterscheidet Balkenträger auf zwei Stützen (statisch bestimmte Systeme) und Balkenträger auf drei und mehr Stützen (statisch unbestimmte Systeme).

2. Unverschiebliche Stabverbindungen.

Wird ein wagrechter Stab 1 I mit den Festpunkten 1 und I mit zwei Stäben 1 2 und I II in einer Ebene zusammengesetzt, welche sich um ihre Endpunkte 1 und I drehen lassen, so bilden sie mit dem Stabe 1 I die in jener Ebene gelegenen geometrisch bestimmten Dreiecke 1 I 2 oder 1 I II, s. Fig. 8.

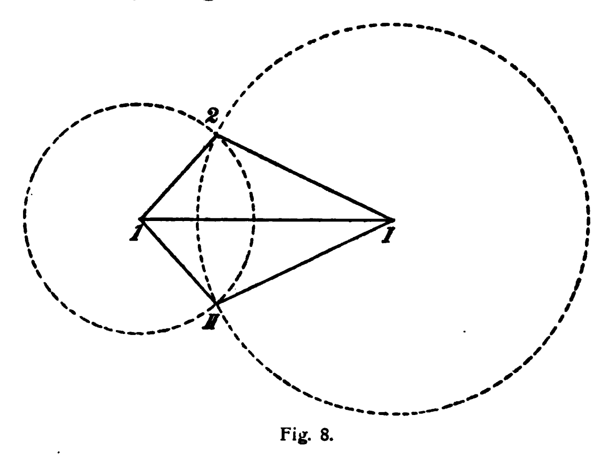


Fig. 8.

Wirkt auf ein solches Stabdreieck 1 I 2 eine äußere Kraft P unter den beliebigen Winkeln γ und δ bezw. zu den Stäben I 2 und 1 2,

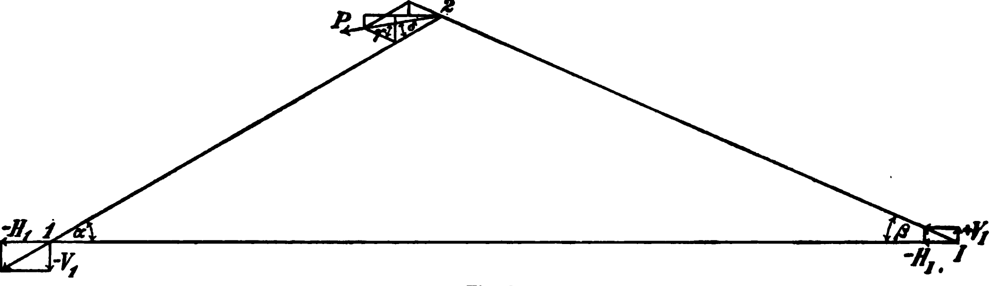


Fig. 9.

s. Fig. 9, so läßt sich die Kraft P jederzeit so zerlegen, daß ihre beiden Seitenkräfte

$$P_1 = -P \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\left(180 - (\gamma + \delta)\right)} = -P \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \delta)} \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$P_I = P \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\left(180 - (\gamma + \delta)\right)} = P \cdot \frac{\sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

durch die Festpunkte 1 und I hindurchgehen, wo sie durch zwei ihnen gleiche, direkt entgegengesetzte Kräfte aufgehoben werden müssen. Nimmt man z. B. $P = 3000$ kg, $\gamma = 35^0$, $\delta = 20^0$, also $\gamma + \delta = 55^0$ an, so würde

$$P_1 = -3000 \cdot \frac{\sin 35}{\sin 55} = -3000 \cdot \frac{0{,}574}{0{,}819} = -2103 \text{ kg}$$

eine Druckspannung und

$$P_I = 3000 \cdot \frac{\sin 20}{\sin 55} = 3000 \cdot \frac{0{,}342}{0{,}819} = 1253 \text{ kg}$$

eine Zugspannung ergeben.

Diese Längsspannungen in den Stäben 1 2 und I 2 lassen sich in den Festpunkten 1 und I wieder in je zwei Seitenkräfte zerlegen, wovon die eine in der Richtung 1 I, die andere rechtwinkelig zu dieser Richtung wirkt. Schließen die Stäbe 1 2 und 1 I den Winkel α, die Stäbe I 2 und 1 I den Winkel β ein, so ergeben sich die beiden wagrechten Seitenkräfte

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad H_1 = P_1 \cos\alpha \text{ und } H_I = P_I \cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

also im Innern des Stabes 1 I der Spannungsunterschied

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad H_1 - H_I = P_1 \cos\alpha - P_I \cos\beta$$

und die beiden lotrechten Seitenkräfte

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad V_1 = -P_1 \sin\alpha \text{ und } V_I = P_I \sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welche in den Festpunkten 1 und I von den gleichen bezw. lotrecht auf- und lotrecht abwärts wirkenden Gegenkräften aufgehoben werden müssen.

Beträgt der Winkel $\alpha = 30^0$, $\beta = 23^0$, so ergibt sich die von rechts nach links wirkende wagrechte Seitenkraft

$$H_1 = -P_1 \cos\alpha = -2103 \cdot \cos 30^0 = -2103 \cdot 0{,}866 = -1821{,}2 \text{ kg},$$

die ebenfalls von rechts nach links wirkende wagrechte Seitenkraft

$$H_I = -P_I \cos\beta = -1253 \cdot \cos 23^0 = -1253 \cdot 0{,}921 = -1154 \text{ kg}.$$

Da die Horizontalkräfte H_1 und H_I bezw. am Festpunkt 1 und I angreifen, also bezw. eine Zug- und eine Druckkraft darstellen, so ist, wegen $H_1 > H_I$, der Spannungsunterschied

$$H_1 - H_I = 1821,2 - 1154,0 = 667,2 \text{ kg}.$$

Die lotrecht abwärts wirkende Seitenkraft

$$V_1 = -P_1 \sin \alpha = -2103 \cdot \sin 30^0 = -2103 \cdot 0,5 = -1051,5 \text{ kg}$$

muß durch die lotrecht aufwärts wirkende gleiche Gegenkraft V_1 aufgehoben werden, während die lotrecht aufwärts wirkende Seitenkraft

$$V_I = P_I \sin \beta = 1253 \cdot \sin 23^0 = 1253 \cdot 0,341 = 489,92 \text{ kg}$$

durch die lotrecht abwärts wirkende gleiche Gegenkraft $-V_I$ aufgehoben werden muß.

Ganz dieselben äußeren Kräfte erhält man in dem Angriffspunkte 2 durch Zerlegung der äußeren Kraft P bezw. ihrer Seitenkräfte P_1 und P_I in je eine lotrechte und je eine wagrechte Seitenkraft V_1 V_I und H_1 H_I, woraus folgt, daß die Dreiecksstäbe 1 2 und I 2 nur die Übertragung der äußeren Kraft P auf die Festpunkte 1 und I vermittelt haben.

3. Elasticität und Festigkeit der Stäbe und Stabgefüge.

a) Elasticität und Festigkeit im Allgemeinen.

Die kleinsten Teilchen von Stäben und Stabgefügen werden durch innere, teils anziehende, teils abstoßende Kräfte zusammengehalten, welche sich im Gleichgewichtszustande befinden, so lange sie ihrem natürlichen Zustande überlassen sind. Dieser Gleichgewichtszustand der kleinsten Teilchen wird gestört, wenn äußere Kräfte auf die Stäbe oder Stabgefüge einwirken. Je nachdem diese Kräfte Zug- oder Druckkräfte sind, werden die einzelnen Stäbe verlängert oder verkürzt, nehmen aber, wenn jene Längenänderungen die Elasticitätsgrenze nicht überschritten haben, ihre frühere Länge wieder an, sobald jene Kräfte zu wirken aufhören. Würden jene Längenänderungen die Elasticitätsgrenze überschreiten, so würden die Bauteile hierdurch auch nach Aufhören jener Kräfte dauernd verlängert oder verkürzt oder gar zerrissen oder zerdrückt. Im Bauwesen dürfen daher höchstens Längenänderungen zugelassen werden, welche innerhalb der Elasticitätsgrenze bleiben, also auch höchstens nur Kräfte, welche dieselben hervorbringen.

Stellt man die an der Elasticitätsgrenze wirkenden Zug- und Druckkräfte durch bezw. positive und negative Abscissen, die von ihnen hervorgebrachten Verlängerungen und Verkürzungen durch bezw. positive und negative Ordinaten dar, so erhält man für Stahl (*S*), Flußeisen (*FE*),

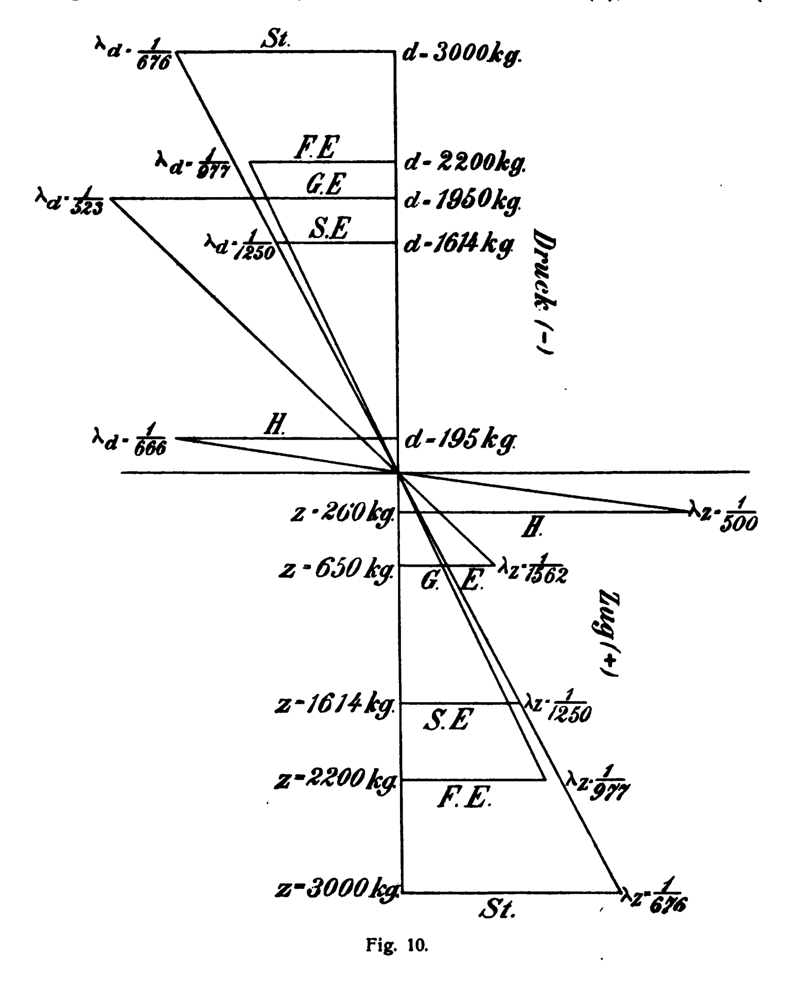


Fig. 10.

Schweißeisen (*SE*), Gußeisen (*GE*) und Holz (*H*) die nachstehende Zusammenstellung, s. Fig. 10.

Nennt man die an der Elasticitätsgrenze erzeugten Zug- und Druckspannungen bezw. *z* und *d*, die daselbst erzeugten Verlängerungen und Verkürzungen bezw. λ_z und λ_d, so ergibt sich, Schweißeisen als Einheit angenommen, für die genannten Baustoffe folgende vergleichende Zusammenstellung:

SE	S	FE	GE	H	SE	S	FE	GE	H
		z					d		
1	1,86	1,4	0,4	0,16	1	1,86	1,4	1,2	0,12
		λ_z					λ_d		
1	1,85	1,28	0,8	2,5	1	1,85	1,28	2,4	1,9

Aus vorstehender Vergleichung folgt, daß

1) Schweißeisen, Stahl und Flußeisen je die gleiche Zugfestigkeit z und Druckfestigkeit d besitzen;

2) Gußeisen eine Zugfestigkeit z besitzt, welche nur etwa ein Drittel seiner Druckfestigkeit beträgt;

3) Holz eine etwa vier Drittel größere Zug- als Druckfestigkeit besitzt;

4) Schweißeisen, Stahl und Flußeisen unter übrigens gleichen Umständen geringere Längenänderungen erfahren als Holz;

5) Gußeisen an der Elasticitätsgrenze nur geringe Verlängerung durch Zug, dagegen die dreifache Verkürzung durch Druck zuläßt.

b) Zugelasticität und Zugfestigkeit, Formänderungsarbeit, Querschnittsminderung.

Wird ein Stab von der Länge l und dem Querschnitte q durch eine Längskraft Z gezogen, s. Fig. 11, so werden alle seine Teilchen gleichmäßig verlängert, und zwar beträgt seine Verlängerung im Ganzen

$$\lambda_z = \frac{l}{q} \cdot \frac{Z}{E} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

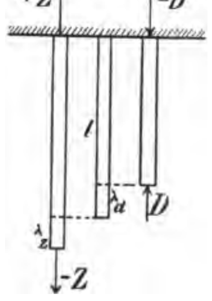


Fig. 11.

worin E den Elasticitätsmodul des Stabstoffes bezeichnet. Die Verlängerung λ_z eines Stabes ist demnach der Stablänge l und der Zugkraft Z direkt und dem Stabquerschnitte q umgekehrt proportional. Die Verlängerung der Längeneinheit ist alsdann

$$\frac{\lambda_z}{l} = \frac{Z}{qE} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Die Kraft, welche diese Verlängerung bewirkt hat,

$$Z = \frac{\lambda_z}{l} \cdot qE \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ist der durch die Verlängerung $\frac{\lambda_z}{l}$ zwischen den n Schichten der kleinsten Teilchen erzeugten Anziehungskraft gleich. Da nun die Verlängerung λ_z der Summe der vergrößerten Abstände der n kleinsten Teilschichten, die Länge l der Summe der ursprünglichen Abstände der kleinsten Teilschichten gleich ist, so ist die elastische Kraft Z der Vergrößerung des Abstandes $\frac{\lambda_z}{n}$ zweier kleinsten Teilschichten, gemessen durch ihren Abstand $\frac{l}{n}$ im ungedehnten Zustande, proportional. Der nach der Verlängerung des Stabes eingetretene vergrößerte Abstand der n kleinsten Teilschichten ist also $\frac{l + \lambda_z}{n}$ und stellt denjenigen inneren Zustand des Stabes dar, welcher seiner Zugspannung entspricht. Zugspannung ist also die durch die dehnende Kraft Z erzeugte und ihr gleiche innere Anziehungskraft der n kleinsten Teilschichten eines Stabes, deren gegenseitiger Abstand dem n^{ten} Teile der ursprünglichen Länge des Stabes, vermehrt um seine Verlängerung, gleich ist.

Die zur Dehnung der Stäbe nötige Wirkungsgröße, die Formänderungsarbeit A, bildet die Summe der Formänderungsarbeiten aller kleinsten Stabteilschichten, d. h. die Summe aller Arbeiten, welche die beim Übergang aus dem unbelasteten in den belasteten Zustand des Stabes von Null aus anwachsenden Spannungen während der völligen Formänderung verrichten. Bezeichnet Z die um x verlängernde Kraft, so ist $A = \int_0^x Z\,dx$, und hierin, nach Gleichung 10, $Z = \frac{qE}{l} x$.

Die zur Ausdehnung des Stabes von o bis λ_z erforderliche Arbeit ist folglich

$$A = \frac{qE}{l} \int_0^{\lambda_z} x\,dx = \tfrac{1}{2} \frac{qE}{l} \lambda_z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10a)$$

Wird hierin der Wert λ_z und Z aus Gleichung 8 und 10 eingeführt, so ergibt sich

$$A = \tfrac{1}{2} \frac{ql}{E} \left(\frac{Z}{q}\right)^2 = \tfrac{1}{2} R \frac{z^2}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10b)$$

worin $R = ql$ den Rauminhalt des unverlängerten Stabes und $z = \frac{Z}{q}$

die specifische Zugspannung des Stabes nach erfolgter Ausdehnung bezeichnet.

Die Formänderungsarbeit, welche ein cbm des Stabstoffes bei Längsspannungen an der Elasticitätsgrenze aufnehmen kann, beträgt durchschnittlich für

$$\text{Schweißeisen } A = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\overline{1500}^2}{2\,000\,000} = 0{,}56 \text{ cmkg}$$

und für

$$\text{Stahl } A_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\overline{3500}^2}{2\,500\,000} = 2{,}45 \text{ cmkg},$$

wobei das Verhältnis $A : A_1 = 1 : 4{,}4$ die größere Leistungsfähigkeit des Stahles gegenüber der des Schweißeisens dartut.

Bei Verlängerung eines Stabes von der Länge l, der Breite und Dicke b tritt gleichzeitig eine Verkleinerung seines Querschnittes ein. Durch Einwirkung der Zugkraft Z beträgt die Länge des Stabes $l\left(1 + \frac{\lambda_z}{l}\right)$, worin $\frac{\lambda_z}{l} = \frac{Z}{b^2 E}$ zu setzen ist. Da die Verkürzung einer Querschnittsseite der Verlängerung des Stabes proportional sein muß, so ist der Querschnitt des Stabes nach seiner Zugbelastung $b^2\left(1 - \mu \frac{\lambda_z}{l}\right)^2$, wenn mit $\mu \frac{\lambda_z}{l}$ die Verkürzung der Querschnittsseiten bezeichnet wird. Wird der Klammerwert entwickelt und $\left(\mu \frac{\lambda_z}{l}\right)^2$ wegen der Kleinheit von λ_z vernachlässigt, so ergibt sich nunmehr der verkleinerte Stabquerschnitt

$$q_z = b^2\left(1 - 2\mu \frac{\lambda_z}{l}\right) \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

und sein Rauminhalt nach dem Zuge

$$R_z = l b^2 \left(1 + \frac{\lambda_z}{l}\right)\left(1 - 2\mu \frac{\lambda_z}{l}\right) \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

oder, wenn die Multiplikation ausgeführt und $2\mu\left(\frac{\lambda_z}{l}\right)^2$ vernachlässigt wird,

$$R_z = l b^2 \left(1 + \frac{\lambda_z}{l} - 2\mu \frac{\lambda_z}{l}\right) \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Je nach dem Werte von μ kann eine Vergrößerung oder Verminderung des Rauminhaltes eintreten. Nach allen hierzu angestellten Versuchen hat sich eine Vergrößerung des Rauminhaltes ergeben, so daß $2\mu \frac{\lambda_z}{l} < \frac{\lambda_z}{l}$ oder $\mu < 0{,}5$, aber größer als Null ist. Über genauere Werte von μ fehlen weitere Angaben.

c) Druckelasticität und Druckfestigkeit, Formänderungsarbeit, Querschnittsmehrung.

Wird ein Stab von der Länge l und dem Querschnitte q durch eine Längskraft D gedrückt, s. Fig. 11, so beträgt seine Verkürzung:

$$\lambda_d = -\frac{l}{q} \cdot \frac{D}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

die Verkürzung seiner Längeneinheit

$$\frac{\lambda_d}{l} = -\frac{D}{qE} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

und die elastische Kraft, welche diese Verkürzung bewirkt hat,

$$D = -\frac{\lambda_d}{l} \cdot qE \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Der nach der Verkürzung des Stabes eingetretene verkleinerte Abstand der n kleinsten Teilschichten $\frac{l-\lambda_d}{n}$ stellt denjenigen inneren Zustand des Stabes dar, welcher seiner Druckspannung entspricht. Die Druckspannung ist also die durch die stauchende Kraft D erzeugte und ihr gleiche innere Abstoßungskraft der n kleinsten Teilschichten eines Stabes, deren gegenseitiger Abstand dem n^{ten} Teile der ursprünglichen Länge des Stabes, vermindert um seine Verkürzung, gleich ist.

Die zur Stauchung der Stäbe nötige Formänderungsarbeit ist, wenn D die um x verkürzende Kraft bezeichnet, $A = -\int_o^x D\,dx$, worin nach Gleichung (16) $D = -\frac{qE}{l} \cdot x$ ist. Die zur Zusammendrückung des Stabes von o bis λ_d erforderliche Arbeit ist also

$$A = \frac{qE}{l} \int_o^{\lambda_d} x\,dx = \tfrac{1}{2}\,\frac{qE}{l}\,\lambda_d^2 \quad \ldots \ldots \quad (16a)$$

und, wenn hierin aus Gleichung (14) und (16) der Wert von λ_d und D eingeführt wird,

$$A = \tfrac{1}{2}\,\frac{ql}{E}\left(\frac{D}{q}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\,R\,\frac{d^2}{E} \quad \ldots \ldots \quad (16b)$$

worin $R = ql$ den Rauminhalt des unverkürzten Stabes und d seine specifische Druckspannung nach erfolgter Zusammendrückung bezeichnet.

Bei Verkürzung eines Stabes von der Länge l, der Breite und Dicke b tritt gleichzeitig eine Vergrößerung seines Querschnittes ein. Durch Einwirkung der Druckkraft D beträgt die Länge des

Stabes $l\left(1-\frac{\lambda_d}{l}\right)$, worin $\frac{\lambda_d}{l}=\frac{D}{b^2E}$ zu setzen ist. Da die Verlängerung einer Querschnittsseite der Verkürzung des Stabes proportional sein muß, so ist der Querschnitt des Stabes nach seiner Druckbelastung $b^2\left(1+\mu\cdot\frac{\lambda_d}{l}\right)^2$, wenn mit $\mu\frac{\lambda_d}{l}$ die Verlängerung der Querschnittsseiten bezeichnet wird. Wird der Klammerwert entwickelt und $\left(\mu\frac{\lambda_z}{l}\right)^2$ wegen der Kleinheit von λ_d vernachlässigt, so ergibt sich der nunmehr vergrößerte Stabquerschnitt

$$q_d=b^2\left(1+2\,\mu\,\frac{\lambda_d}{l}\right) \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

und sein Rauminhalt nach dem Drucke

$$R_d=lb^2\left(1-\frac{\lambda_d}{l}\right)\left(1+2\,\mu\,\frac{\lambda_d}{t}\right) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

oder, wenn die Multiplikation ausgeführt und $2\mu\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2$ vernachlässigt wird,

$$R_d=lb^2\left(1-\frac{\lambda_d}{l}+2\mu\frac{\lambda_d}{l}\right) \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

d) Biegungselasticität und Biegungsfestigkeit.

Wird ein Stab von der Länge l und dem Querschnitte $q=bh$ in seiner Mitte durch eine lotrechte Querkraft Q gebogen, s. Fig. 12, so entsteht in den Stützpunkten 1 und I der lotrechte Gegendruck $Q/_2$, welcher in Bezug auf die Mitte das Angriffsmoment ${}^aM$ mit dem Hebelarm $l/_2$ erzeugt. Dem Werte ${}^aM$ muß das Widerstandsmoment ${}^wM$ mindestens gleich sein.

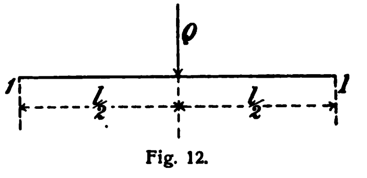


Fig. 12.

Nun werden die oberen und unteren Schichten des Stabes bezw. verkürzt und verlängert, also bezw. gedrückt und gezogen, während sich in der halben Höhe des Stabes eine Schichte befindet, welche weder gedrückt noch gezogen wird und deshalb die neutrale Schichte oder auch die Nullschichte heißt. Oberhalb dieser Schichte sind die Druckspannungen, unterhalb dieser Schichte die Zugspannungen ihrem Abstande von der neutralen Schichte proportional, also bezw. $\frac{z}{h/_2}\cdot y_z$ und $\frac{d}{h/_2}\cdot y_d$, worin $\frac{z}{h/_2}$ und $\frac{d}{h/_2}$ bezw. die Zugspannung und die

Druckspannung in der Einheitsentfernung von der neutralen Faserschichte, y_z und y_d bezw. die Abstände irgend einer gezogenen oder gedrückten Schichte von der neutralen Schichte darstellen, s. Fig. 13 und 14. Für $y_z = y_d = 0$ werden beide Werte 0 und nehmen für $y_z = y_d = h/_2$ bezw. ihren größten Wert z und d an.

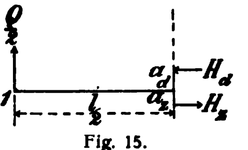


Fig. 13. Fig. 14.

Die Mittelkräfte H_z und $-H_d$ dieser Zug- und Druckspannungen liegen also bezw. in den Abständen $a_z = a_d = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$ von der neutralen Schichte, welche zugleich die Hebelsarme der Mittelkräfte H_z und $-H_d$ in Bezug auf die neutrale Faserschichte, s. Fig. 15, bilden. Hiernach muß, wegen ${}^wM = {}^aM$,

Fig. 15.

$$H_d a_d + H_z a_z = Q/_2 \cdot l/_2 \quad . \quad . \quad (20)$$

sein. Diese Gleichung stellt die Momente eines Doppelhebels dar, wobei $-H_d$ und H_z ein Kräftepaar mit dem Hebelsarm $a_d + a_z$ bilden.

Die Zugkräfte H_z und Druckkräfte $-H_d$ bringen bezw. unterhalb und oberhalb der neutralen Faserschichte bezw. Dehnungen und Stauchungen hervor, welche parallel zur neutralen Faserschichte wirken, mithin als Längskräfte zu bezeichnen sind, auf Grund deren die Größe jener Dehnungen und Stauchungen nach Maßgabe der unter 8 und 14 entwickelten Gleichungen zu bestimmen ist.

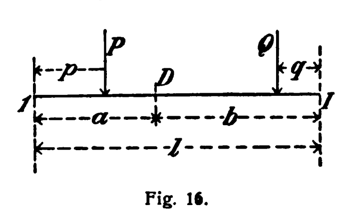


Fig. 16.

Für andere Belastungen und Querschnitte ändern sich die Angriffs- und Widerstandsmomente. Die ersteren sind mit Bezug auf den Drehpunkt D und die Bezeichungen der Fig. 16 allgemein

$${}^aM = \frac{1}{l}(Ppb + Qqa) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und die Widerstandsmomente

$${}^wM = \frac{z}{a_z} t = \frac{d}{a_d} t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

worin t das auf die neutrale Faserschichte bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes darstellt.

e) Elastische Nachwirkung.

Die durch Zug- und Druckkräfte in Stäben bewirkten Längenänderungen treten zwar in kurzer Zeit ein und verschwinden auch in



kurzer Zeit, sobald jene Kräfte zu wirken aufhören. Gleichwohl treten bei fortdauernder Einwirkung äußerer Kräfte im Laufe der Zeit mehr oder minder große weitere Längenänderungen ein, welche man als elastische Nachwirkung bezeichnet.

Die Verschiebung der kleinsten Teilchen aus der Gleichgewichtslage durch äußere Kräfte kann also nicht sofort erfolgen, weil sich jener Verschiebung ein Widerstand entgegenstellt. Nennt man den Abstand der verschobenen kleinsten Teilchen von ihrer Gleichgewichtslage x und die Zeit, in welcher ihre Verschiebung durch äußere Kräfte bewirkt ist, t, so kann die Geschwindigkeit, womit die kleinsten Teilchen sich nach Aufhören der äußeren Kräfte ihrer Gleichgewichtslage nähern, dem Abstande x direkt und der Zeit t umgekehrt proportional gesetzt werden. Ist nun eine Zeit t_1 beobachtet, innerhalb deren der Abstand der kleinsten Teilchen von ihrer Gleichgewichtslage x_1 beträgt, so ergibt sich aus der Proportion

$$\frac{x_1}{x} = \frac{t}{t_1} \quad \dots\dots\dots \quad (23)$$

der Abstand

$$x = \frac{t_1 x_1}{t} = K \cdot \frac{1}{t} \quad \dots\dots\dots \quad (24)$$

worin K eine dem angewandten Stabstoffe entsprechende Konstante darstellt.

4. Das elastische Stabdreieck unter Einwirkung verschiedener Kräfte.

a) Einfluß der Temperatur auf das elastische Stabdreieck.

Stellt 1 I 2, s. Fig. 17, das Stabdreieck mit den Festpunkten 1 I bei

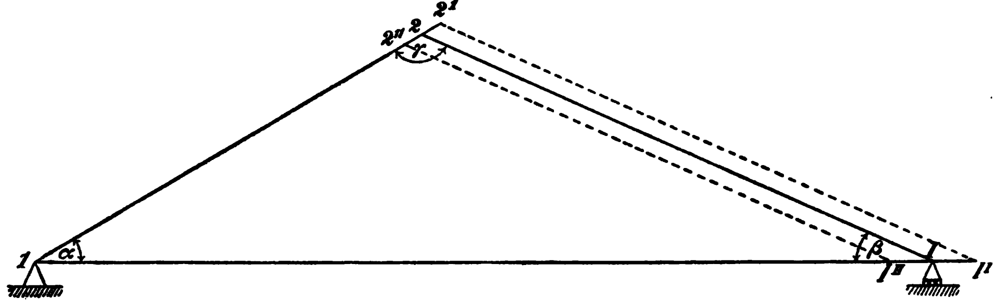


Fig. 17.

der mittleren Temperatur von $+ 10^0$ C. dar, so werden dessen drei Stäbe im Verhältnis zu ihrer Länge l bei steigender Temperatur ver-

längert, bei sinkender Temperatur verkürzt. Diese Längenänderung beträgt bezw.

$$\pm \Delta l = \pm \alpha \tau l \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

worin $\alpha = \frac{1}{692}$ den Ausdehnungswert des Eisens von 0°—100° C. und τ die höchste und die niedrigste Temperatur von bezw. + 40° und — 20°, also die mittlere Temperatur von + 10° bezeichnet. Werden diese Längenänderungen berechnet und in das Stabdreieck eingetragen, so stellen 1 I′ 2′ und 1 I″ 2″ die dem höchsten und dem niedrigsten Temperaturgrad entsprechenden Stabdreiecke dar, welche sich und dem Stabdreick 1 I 2 ähnlich sind, also die gleichen Winkel $\alpha \beta \gamma$ behalten. Ist der Festpunkt 1 unverschieblich, so muß der zweite Festpunkt I in der Richtung 1 I zwischen den Punkten I′ und I″ verschieblich sein, also ein bewegliches Lager erhalten.

Der Stab 1 2 in einem eisernen Stabdreieck 1 I 2, welcher bei der mittleren Temperatur von + 10° C. die Länge von 6 m besitzt, wird nach Gleichung 25 bei der höchsten Temperatur von + 40° C. um

$$\Delta l = \frac{1}{692} \cdot \frac{30^0}{100} \cdot 6 \text{ m} = 0{,}00043 \cdot 6 = 0{,}0026 \text{ m}$$

ausgedehnt und bei der niedrigsten Temperatur von — 20° C. um

$$\Delta l = -\frac{1}{692} \cdot \frac{30^0}{100} \cdot 6 = -0{,}00043 \cdot 6 = -0{,}0026 \text{ m}$$

verkürzt, mithin beträgt dessen Gesamtlänge im ersten und im zweiten Falle bezw. $l = 6 + 0{,}0026 = 6{,}0026$ m und $l = 6 - 0{,}0026 = 5{,}0074$ m. Da die Stäbe 1 I und I 2 in demselben Verhältnisse von $0{,}00043 = \frac{43}{100000}$ verlängert und verkürzt werden, so ergeben sich bezw. die Längen 1 I′ und 1 I″ für den Stab 1 I, die Längen I′ 2′ und I″ 2″ für den Stab I 2, mithin bezw. die Stabdreiecke 1 I′ 2′ und 1 I″ 2″. In der Fig. 17 sind alle Stablängen in $\frac{1}{100}$ ihrer Größe und alle Längenänderungen, um sie noch kenntlich zu machen, in ihrer natürlichen Größe aufgetragen.

b) Einwirkung äußerer Kräfte auf das elastische Stabdreieck.

Für das in Fig. 9 und 18 dargestellte, durch die gleiche und gleichgeneigte äußere Kraft P angegriffene eiserne Stabdreieck 1 I 2 mit den Winkeln $\alpha \beta \gamma$ ergeben sich aus den Gleichungen (8) und (14) die elastischen Verlängerungen und Verkürzungen für den Querschnitt $q = 1$ bezw. zu

$$(26) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \lambda_z = \frac{l}{E} \cdot Z \text{ und } \lambda_d = -\frac{l}{E} D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Der Stab 1 2, welcher durch die Längskraft $D = P_1$ gedrückt wird, erfährt nach Gleichung (27) die Verkürzung

$$\lambda_d = -\frac{l}{E} \cdot P_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Die Stäbe I 2 und 1 I, welche bezw. durch die Längskräfte $Z = P_I$ und $H_1 - H_I$ gezogen werden, erfahren nach Gleichung (26) die Verlängerungen

$$(29) \quad . \quad . \quad . \quad \lambda_z = \frac{l}{E} \cdot P_I \text{ und } \lambda_z = \frac{l}{E} (H_1 - H_I) \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Werden für P_1, P_I und $H_1 - H_I$ die früher gefundenen Werte eingeführt und wird der Elasticitätsmodul $E = 2020000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gesetzt, so ergeben sich für die Stablängen 6 m, 8,35 m und 12 m der Stäbe 1 2, I 2 und 1 I bezw. die in Fig. 18 eingetragenen Längenänderungen

$$\lambda_d = -6 \cdot \frac{2103}{2020000} = -0{,}006 \text{ m}, \quad \lambda_z = 8{,}35 \cdot \frac{1253}{2020000} = 0{,}005 \text{ m}$$

und

$$\lambda_z = 12 \cdot \frac{667{,}2}{2020000} = 0{,}004 \text{ m}.$$

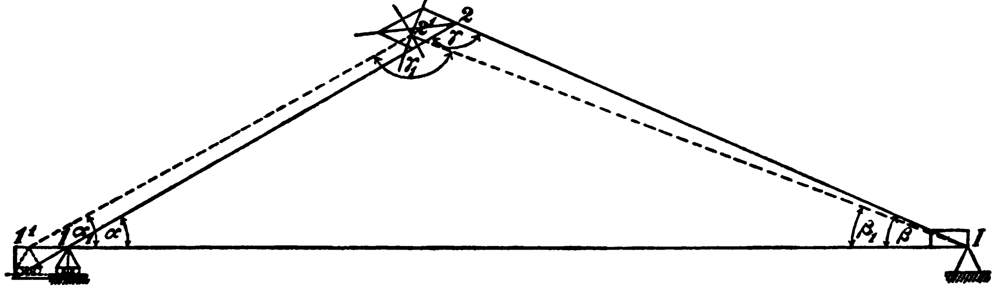


Fig. 18.

In Fig. 18 sind alle Stablängen in $\frac{1}{100}$ ihrer Größe und alle Längenänderungen, um sie noch kenntlich zu machen, in ihrer natürlichen Größe aufgetragen. Wenn das Stabdreieck diesen Längenänderungen, wodurch die Winkel $\alpha \beta \gamma$ in die Winkel $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ übergegangen sind, entsprechen soll, so muß die Verbindung seiner Stäbe in den Festpunkten 1, I und 2 eine Drehung zulassen, also eine gelenkartige sein.

Die Winkel $\alpha' \beta' \gamma'$ ergeben sich für die bekannten drei Längen der Dreieckseiten mit Einschluß ihrer Längenänderungen

$1'2' = l - \lambda_d = 6{,}00 - 0{,}006 = 5{,}994$ m
$\mathrm{I}\,2' = l + \lambda_z = 8{,}35 + 0{,}005 = 8{,}355$ m
$1'\mathrm{I} = l + \lambda_z = 12{,}00 + 0{,}004 = 12{,}004$ m

aus den Gleichungen:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{5{,}994}^2 + \overline{12{,}004}^2 - \overline{8{,}355}^2}{2 \cdot 5{,}994 \cdot 12{,}004} = 0{,}76583, \quad \alpha_1 = 40^0\,2'$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\overline{8{,}355}^2 + \overline{12{,}004}^2 - \overline{5{,}994}^2}{2 \cdot 8{,}355 \cdot 12{,}004} = 0{,}88711, \quad \beta_1 = 27^0\,29'$$

woraus man $\gamma_1 = 180 - (\alpha_1 + \beta_1) = 180 - (40^0\,2' + 27^0\,29') = 112^0\,29'$ erhält. Da die ursprünglichen Winkel $\alpha = 30^0$, $\beta = 24^0$ und $\gamma = 126^0$ messen, so ergeben sich die positiven und negativen Unterschiede der ursprünglichen und der veränderten Winkel: $\alpha_1 - \alpha = 10^0\,2'$, $\beta_1 - \beta = 3^0\,24'$ und $\gamma_1 - \gamma = -13^0\,31'$.

c) Einfluß der Temperatur und äußerer Kräfte auf das elastische Stabdreieck.

Wirken Temperatur und äußere Kräfte gleichzeitig auf Verlängerung oder Verkürzung der Stäbe, so ist die denselben entsprechende Längenänderung bezw.

$$(31) \quad \Lambda_z = +\Delta l + \lambda_z \quad \text{und} \quad \Lambda_d = -\Delta l - \lambda_d \quad (32)$$

also die veränderte Stablänge bezw.

$$l + \Delta l + \lambda_z \quad \text{und} \quad l - (\Delta l + \lambda_d).$$

Wirken die beiden äußeren Kräfte im entgegengesetzten Sinne, so ist die denselben entsprechende Längenänderung durch Temperaturzunahme und durch eine Druckkraft

$$\Lambda = \Delta l - \lambda_d \quad (33)$$

durch Temperaturabnahme und durch eine Zugkraft

$$\Lambda = -\Delta l + \lambda_z \quad (34)$$

also die veränderten Stablängen bezw.

$$l + \Delta_l - \lambda_d \quad \text{und} \quad l - \Delta l + \lambda_z.$$

Werden diese veränderten Stablängen in der unter 2 erörterten Weise zu einem Stabdreieck 1 I 2 mit den Winkeln $\alpha\,\beta\,\gamma$ vereinigt, so ergibt sich auch hier eine mehr oder minder große Veränderung der Winkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ in bezw. $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$, welche die gelenkartige Verbindung der Stäbe in 1, I und 2 erfordert.

Werden nämlich die durch Zerlegung der Kraft P in dem Scheitel 2 nach 2 1 und nach 2 I erhaltenen Seitenkräfte aufgetragen und die Zer-

legung der ersteren im Stützpunkt 1, die Zerlegung der letzteren im Stützpunkt I in je eine wagrechte und in eine lotrechte Kraft bewirkt, so bildet wieder die algebraische Summe der beiden wagrechten Seitenkräfte die wagrechte Seitenkraft der Kraft P und die algebraische Summe der beiden lotrechten Seitenkräfte die lotrechte Seitenkraft der Kraft P.

Mit Benutzung der unter *a* und *b* gefundenen Werte für die Längenänderungen durch Temperatur und Belastung ergeben sich für dasselbe Stabdreieck bei der höchsten Temperatur und unter Einwirkung der Kraft $P = 3000$ kg die Längenänderungen der Stäbe I 2', 1' 2' und I 1' bezw.

$$\Lambda_z = \Delta l + \lambda_z = 0,0036 + 0,0050 = 0,0086 \text{ m}$$
$$\Lambda_d = \Delta l - \lambda_d = 0,0026 - 0,0060 = 0,0034 \text{ m}$$
$$\Lambda_z = \Delta l + \lambda_z = 0,0052 + 0,0040 = 0,0092 \text{ m}$$

mithin die veränderten Längen der Stäbe

$$\text{I } 2' = l + \Lambda_z = 8,35 + 0,0086 = 8,3586 \text{ m}$$
$$1'\,2' = l + \Lambda_d = 6,00 - 0,0034 = 5,9966 \text{ m}$$
$$\text{I } 1' = l + \Lambda_z = 12,00 + 0,0092 = 12,0092 \text{ m.}$$

Bei der niedrigsten Temperatur und unter Einwirkung der Last P ergeben sich die Längenänderungen jener Stäbe

$$\Lambda_z = -\Delta l + \lambda_z = -0,0036 + 0,0050 = 0,0014 \text{ m}$$
$$\Lambda_d = -\Delta l - \lambda_d = -0,0026 - 0,0060 = -0,0086 \text{ m}$$
$$\Lambda_z = -\Delta l + \lambda_z = -0,0052 + 0,0040 = -0,0012 \text{ m}$$

mithin die veränderten Längen der Stäbe

$$\text{I } 2' = l + \Lambda_z = 8,35 + 0,0014 = 8,3514 \text{ m}$$
$$1'\,2' = l - \Lambda_d = 6,00 - 0,0086 = 5,9914 \text{ m}$$
$$\text{I } 1' = l + \Lambda_z = 12,00 - 0,0012 = 11,9988 \text{ m.}$$

Die Winkel α_1 β_1 γ_1 erhält man im ersten Fall aus den bekannten drei Gesamtlängen der Dreieckseiten mit Einschluß ihrer beiden Längenänderungen bezw.

$$\cos \alpha_1 = \frac{\overline{5,9966}^2 + \overline{12,0092}^2 - \overline{8,3568}^2}{2 \cdot 5,9966 \cdot 12,0092} = 0,75404; \; \alpha_1 = 41^0\,4',$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\overline{8,3586}^2 + \overline{12,0092}^2 - \overline{5,9966}^2}{2 \cdot 8,3586 \cdot 12,0092} = 0,87884; \; \beta_1 = 28^0\,31',$$

folglich $\gamma_1 = 180 - (\alpha_1 + \beta_1) = 180 - 69^0\ 35' = 110^0\ 25'$.

Da die ursprünglichen Winkel $\alpha = 30^0$, $\beta = 24^0$ und $\gamma = 126^0$ messen, so ergeben sich die positiven und negativen Unterschiede der ursprünglichen und veränderten Winkel:

$$\alpha - \alpha_1 = -11^0\,4'; \; \beta - \beta_1 = -4^0\,31'; \; \gamma - \gamma_1 = +15^0\,35'.$$

Im zweiten Fall erhält man:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{5{,}9914}^2 + \overline{11{,}9988}^2 - \overline{8{,}3514}^2}{2 \cdot 5{,}9914 \cdot 11{,}9988} = 0{,}7652; \; \alpha_1 = 40^0\,1'$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\overline{8{,}3514}^2 + \overline{11{,}9983}^2 - \overline{5{,}9914}^2}{2 \cdot 8{,}3514 \cdot 11{,}9988} = 0{,}8873; \; \beta_1 = 27^0\,28',$$

folglich $\gamma_1 = 180 - (\alpha_1 + \beta_1) = 180 - 67^0\,29' = 112^0\,31'$.

Mit Bezug auf die ursprünglichen Winkel α, β, γ erhält man die positiven und negativen Winkelunterschiede

$$\alpha - \alpha_1 = -10^0\,1'; \; \beta - \beta_1 = -3^0\,28'; \; \gamma - \gamma_1 = +13^0\,29'.$$

5. Verschiebliche Stabverbindungen.

Werden mehr als drei, z. B. vier, Stäbe von gegebener Länge, nämlich 1 I mit den Festpunkten 1 und I, 1 2, I 3 und 2 3 zusammengesetzt, so ergeben sich unzählige g e o m e t r i s c h v e r s c h i e b l i c h e Figuren, z. B. solche, bei welchen der Stab 2 3 die Lagen 2′ 3′ und 2″ 3″ annimmt, s. Fig. 19.

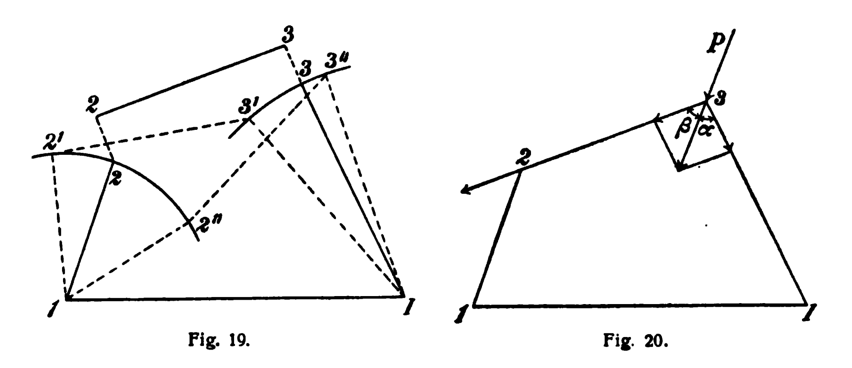


Fig. 19. Fig. 20.

Wird ein solches aus vier Stäben von gegebener Länge zusammengesetztes verschiebliches Stabgefüge von einer beliebigen Kraft P unter den beliebigen Winkeln α und β zu den angegriffenen Stäben, hier I 3,23, getroffen, s. Fig. 20, so läßt sich dieselbe nach 3 I in die Seitenkraft

$$P \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\left(180 - (\alpha + \beta)\right)} = P \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$ und nach 3 2 in die Seitenkraft

$P \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \left(180 - (\alpha + \beta)\right)} = P \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$ zerlegen, wovon die erstere durch den Festpunkt I geht und in demselben aufgehoben werden muß, die letztere durch den Punkt 2 geht und denselben um den Festpunkt 1 zu drehen sucht. Ein Stabgefüge aus mehr als drei, z. B. aus vier Stäben, ist demnach nicht nur im geometrischen, sondern auch im statischen Sinne verschieblich. Bei Stabgefügen aus mehr als vier Stäben mit gegebener Länge wächst die Verschieblichkeit im geometrischen und statischen Sinne mit der Anzahl der zu vier- oder mehrteiligen Stabgefügen zusammengesetzten Stäbe.

6. Versteifung verschieblicher Stabverbindungen.

Um das aus vier Stäben von gegebener Länge, nämlich 1 I mit den Festpunkten 1 und I, 1 2, I 3 und 2 3 gebildete Stabviereck, s. Fig. 21, in eine unverschiebliche Stabverbindung zu verwandeln, ist deren Zerlegung in Stabdreiecke erforderlich, welche durch Einschaltung entweder der Diagonale I 2 oder der Diagonale 1 3 oder der beiden Diagonalen I 2 und 1 3 bewirkt werden kann. Zerlegt man nämlich die Kraft P in ihre Seitenkräfte P_1 und P_2, welche bezw. durch die Punkte

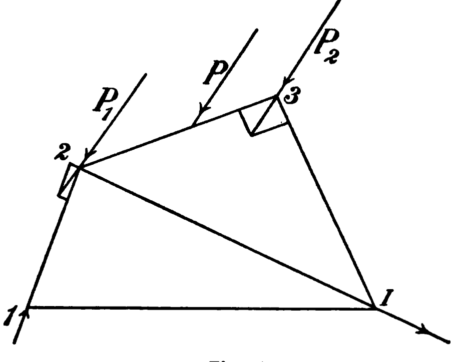


Fig. 21.

2 und 3 hindurchgehen, so wird die Kraft P_1 in der früher angegebenen Weise auf die Festpunkte 1 und I übertragen und dort aufgehoben. Da hierdurch der Punkt 2 festgelegt ist, so bildet er einen Festpunkt zweiter Ordnung in dem Dreieck 1 I 2, in welchem die beiden Seitenkräfte der Kraft P_1 durch die Festpunkte 1 und I gehen und daselbst aufgehoben werden. Mit Bezug auf den Festpunkt I erster und 2 zweiter Ordnung wird 3 zu einem Festpunkte dritter Ordnung. Sämtliche vier Festpunkte sind jedoch nur dann als solche zu betrachten, wenn sie den in ihnen entwickelten Stabkräften mindestens die nach Größe und Richtung gleichen Gegenkräfte entgegen zu setzen im Stande sind.

Versteifung ist hiernach allgemein die Verwandlung einer verschieblichen in eine unverschiebliche Stabverbindung durch Einschaltung von Stabdreiecken.

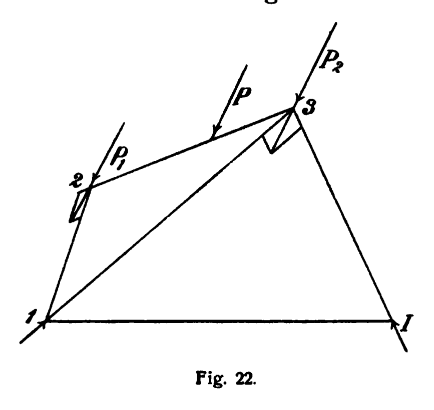


Fig. 22.

Erfolgt die Versteifung des Stabvierecks 1 I 2 3 durch Einschaltung der entgegengesetzten Diagonale 1 3, s. Fig. 22, so wird in 3 der Festpunkt zweiter und in 2 der Festpunkt dritter Ordnung gewonnen. Die Seitenkräfte der Kraft P_2 gehen durch die Festpunkte 1 und I, wo sie aufgehoben werden, während auch hier für alle Festpunkte die vorerwähnten Bedingungen bestehen.

Für die Praxis ergeben sich hieraus Anordnungen von Konstruktionen, welche viereckige Stabverbindungen vermeiden, oder, wo solche notwendig sind, durch Zerlegung in Stabdreiecke versteifen, s. Fig. 23. Beispiele hierfür liefern die doppelten Spreng-, Häng- und Hängsprengwerke, welche nach Angabe des Verfassers durch die Zerlegung von

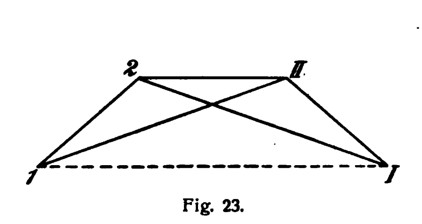


Fig. 23.

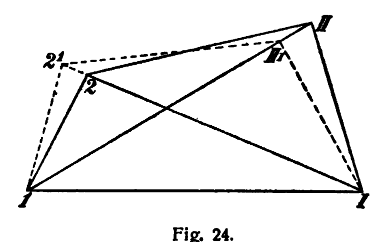


Fig. 24.

Paralleltrapezen in Dreiecke und steife Verbindungen verwandelt werden, s. Fig. 142 bis 147. Hierbei ist es gleichgültig, ob die Punkte 1 und I durch einen Stab verbunden oder durch Widerlager festgelegt sind.

In dem Stabviereck 1 I 2 II, s. Fig. 24, wird die Diagonale I 2 unter dem Einflusse der Seitenkraft P_1 gezogen und die Diagonale 1 II unter dem Einflusse der Seitenkraft P_2 gedrückt.

Die Dehnung, welche hierdurch der Stab I 2 erfährt, ist $\lambda_z = \frac{P_1}{E} \cdot l_z$, die Stauchung, welche der Stab 1 II erleidet, ist $\lambda_d = \frac{P_2}{E} \cdot l_d$, worin E den Elasticitätsmodul des angewandten Stabstoffes bedeutet. Durch diese beiden Längenänderungen geht die Form des Stabvierecks 1 I 2 II

in die Form 1 I 2′ II′ über, wobei 2 2′ und II II′ bezw. die elastische Verlängerung des Stabes I 2 und die elastische Verkürzung des Stabes 1 II darstellt.

Die von den Stäben 1 2 und I 2, sowie von den Stäben 1 II und I II auf die Festpunkte 1 und I übertragenen Kräfte sind, nach dem Früheren, in der Richtung 1 I und sowohl in 1 als in I normal zu dieser Richtung zu zerlegen. Sämtliche in der ersteren Richtung wirkenden Seitenkräfte sind durch den Stab 1 I, sämtliche normal zu jener Richtung wirkenden Kräfte durch die Festpunkte 1 und I aufzunehmen.

Rücken die Festpunkte erster Ordnung 1 und I weiter auseinander, s. Fig. 25, wächst also die Stützweite einer verschieblichen Stabverbindung, wodurch die einzuschaltenden Versteifungsstäbe 1 II und I 2 zu lang werden würden, so lassen sich durch Einschaltung eines Festpunktes dritter Ordnung (3 III) diese Stäbe durch die kürzeren Stäbe 2 (3 III) und II (3 III) ersetzen, wodurch die Reihen (3 III) 2 1 und (3 III) II I von Festpunkten niederer bis zu denen erster Ordnung entstehen.

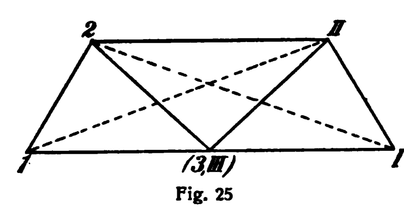


Fig. 25

Werden nun zwischen noch weiter entfernte Stützpunkte 1 I mehrere, z. B. neun, Festpunkte 2 3 4 5 (6 VI) und II III IV V (VI 6) eingeschaltet, s. Fig. 26, wodurch ein Paralleltrapezträger mit gleichschenkeligem Stabgefüge gebildet wird, so ergeben sich von den beiden Festpunkten 1 und I nach der Mitte hin die aufeinanderfolgenden Festpunkte n. O. 2 3 4 5 (6 VI) und II III IV V (VI 6).

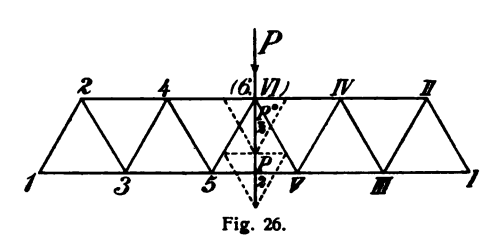


Fig. 26.

Würde die Last P in dem Festpunkte n. O. (4 VIII) angreifen, s. Fig. 27, so würden die aufeinanderfolgenden Festpunkte links 3 2 1, rechts VIII VII VI V IV III II I sein.

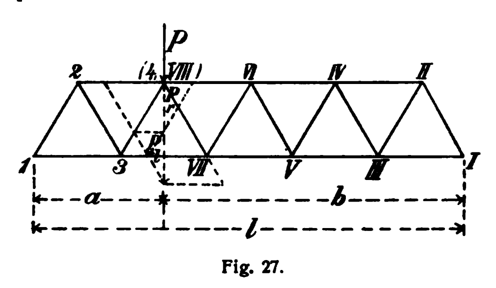


Fig. 27.

Bei Stabgefügen von anderer Form, z. B. bei Bogenbalkenträgern mit zwei gekrümmten Gurten oder mit einem geraden Ober- und einem gekrümmten Untergurt, bei



Bogenstützträgern oder Bogenhängträgern mit dem Stabgefüge des rechtwinkeligen Dreiecks, ergibt sich eine ähnliche Aufeinanderfolge der Festpunkte niederer bis zu den Festpunkten erster Ordnung; s. die vierzehn Figuren 34 bis 47.

7. Formänderungsarbeit von Stabgefügen. Gegenseitigkeit ihrer elastischen Verschiebungen. Kleinste Formänderungsarbeit.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{K}_m \mathfrak{k}_m$ diejenige mechanische Arbeit, welche die äußere, zwar vorhandene, aber im Augenblicke nicht wirksam gedachte Kraft $\mathfrak{K}_m$ verrichtet, wenn ihr Angriffspunkt im Sinne von $\mathfrak{K}_m$ um die Strecke $\mathfrak{k}_m$ verschoben wird, mit $\mathfrak{S}\,\Delta s$ die Formänderungsarbeit der Stabspannung $\mathfrak{S}$ bei der Änderung Δs der Stablänge s während des gedachten virtuellen Zustandes, so ist nach dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen

$$\Sigma\,\mathfrak{K}_m \mathfrak{k}_m = \Sigma\,\mathfrak{S}\,\Delta s$$

d. h. die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist ebenso groß wie die virtuelle Formänderungsarbeit des Stabgefüges.

Für die wirkliche Kraft K_m und die wirkliche Spannung S der Formänderungsarbeit ergibt sich

$$\Sigma\,K_m k_m = \Sigma\,S\,\Delta s \quad \ldots\ldots \quad (34a)$$

worin jetzt k_m die Projektion des wirklichen Weges auf die Richtung von K_m bedeutet.

Wachsen die äußeren und die inneren Kräfte von Null bis zu ihren Endwerten K und S an, wobei K_x und S_x gleichzeitige Zwischenwerte dieser Kräfte mit den Verschiebungen k um dk und Δs um $d\Delta s$ bilden, so entsteht die Gleichung

$$\Sigma\,K_x\,dk = \Sigma\,S_x\,d\Delta s,$$

welche für jedes der kleinsten Zeitteilchen gilt, in welche sich die ganze Bewegungsdauer zerlegen läßt. Berücksichtigt man, daß nach Gleichung 8 und 14 $\Delta s = \frac{S_x s}{E q}$ ist, so folgt hieraus

$$\Sigma \int_o^K K_x\,dk = \Sigma \int_o^S S_x\,d\Delta s = \Sigma \int_o^S S_x \frac{d S_x s}{E q} = \Sigma \frac{S^2 s}{2 E q} = \tfrac{1}{2}\Sigma\,S\,\Delta s$$

Da nach Gleichung (34a) $\frac{1}{2}\Sigma\,S\,\Delta s = \frac{1}{2}\Sigma\,K_m k_m$ ist, so ergibt sich hieraus das Clapeyron'sche Gesetz der Formänderungsarbeit:

$$A = \Sigma \int_0^K K_x \, dk = \tfrac{1}{2} \Sigma K_m k_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34b)$$

Die mechanische Arbeit der äußeren Kräfte, welche allmählich von o bis zu ihren Endwerten wachsen, ist daher stets halb so groß, als wenn sämtliche Kräfte K_m während der ganzen Formänderung ihre Endwerte hätten.

Erzeugen bei einem Stabgefüge die Belastungen K_m mit den Wegen k_m die Spannungen S_m mit den Längenänderungen $\Delta s_m = \frac{S_m s}{E q}$, die Belastungen K_n mit den Wegen k_n, die Spannungen S_n mit den Längenänderungen $\Delta s_n = \frac{S_n s}{E q}$, so bedeute nun k_{mn} den Wert, welchen der Weg k_m irgend einer Kraft K_m annimmt, wenn auf das Stabgefüge nur die Belastungen K_n wirken, ferner k_{nm} den nur durch die Kräfte K_m hervorgerufenen Weg irgend einer Kraft K_n.

Aus der Gleichung (34a) erhält man sodann für den Kräftezustand $K_m S_m$ und den hiervon unabhängigen Verschiebungszustand $k_{mn} \Delta s_n$

$$\Sigma K_m k_{mn} = \Sigma S_m \cdot \Delta s_n = \Sigma S_m \cdot \frac{S_n s}{E q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34c)$$

ferner für den Kräftezustand $K_n k_n$ und den hiervon unabhängigen Verschiebungszustand $k_{nm} \Delta s_m$

$$\Sigma K_n k_{nm} = \Sigma S_n \cdot \Delta s_m = \Sigma S_n \cdot \frac{S_m s}{E q} \quad . \quad . \quad . \quad (34d)$$

Hieraus ergibt sich

$$\Sigma K_m k_{mn} = \Sigma K_n k_{nm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34e)$$

Wirkt auf das Stabgefüge einmal nur die Kraft $K_m = 1$, sodann nur eine Kraft $K_n = 1$, so erhält man aus Gleichung (34e) das Maxwell-Betti'sche Gesetz der Gleichheit gegenseitiger Verschiebungen:

$$k_{mn} = k_{nm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34f)$$

Nimmt man ferner an, daß auf ein Stabgefüge die Kräfte $K_a K_b \ldots K_m$ mit den Wegen $k_a k_b \ldots k_m$ einwirken, während die virtuelle Arbeit seiner Stützendrucke Null ist und das Stabgefüge seine anfängliche Temperatur beibehält, so ist

$$k_a = k_{aa} K_a + k_{ab} K_b + \ldots k_{am} K_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34g)$$

$$k_b = k_{ba} K_a + k_{bb} K_b + \ldots k_{bm} K_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34h)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$k_m = k_{ma} K_a + k_{mb} K_b + \ldots k_{mm} K_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34i)$$

Wächst nun K_m um dK_m, während die übrigen Belastungen ungeändert bleiben, so wachsen $k_a\, k_b \ldots k_m$ bezw. um

$$dk_a = k_{am}\, dK_m \quad dk_b = k_{bm}\, dK_m \ldots dk_m = k_{mm}\, dK_m \qquad (34\text{k})$$

Die Formänderungsarbeit A, welche der mechanischen Arbeit der äußeren Kräfte gleich ist, wächst um

$$dA = K_a\, dk_a + K_b\, dk_b + \ldots K_m\, dk_m \quad \ldots \quad (34\text{l})$$

Werden hierin die Werte $dk_a\, dk_b \ldots dk_m$ aus Gleichung (34k) eingeführt und der gemeinschaftliche Faktor dK_m ausgeschieden, so erhält man

$$dA = (k_{am}\, K_a + k_{bm}\, K_b + \ldots k_{mm}\, K_m)\, dK_m$$

Da hierin nach Gleichung (34f) $k_{mn} = k_{nm}$ gesetzt werden kann, so folgt hieraus das Castigliano-Fränkel'sche Gesetz der kleinsten Formänderungsarbeit:

$$\frac{dA}{dK_m} = k_{ma}\, K_a + k_{mb} K_b + \ldots k_{mm}\, K_m = k_m \quad . \quad . \quad (34\text{m})$$

8. Schwingungen in festen Körpern.

a) Allgemeines.

Alle festen Körper, wozu die Baugefüge und die Teile von Baugefügen gehören, bestehen aus kleinsten Teilen, welche durch anziehende und abstoßende, zwischen ihnen tätige Kräfte im Gleichgewichte gehalten werden. Wenn man annimmt, daß die Anziehungskräfte der kleinsten Teile sich mit deren Entfernung ändern, die Abstoßungskräfte der kleinsten Teile bei deren Annäherung rascher wachsen als die Anziehungskräfte, so ist durch das Zusammenwirken solcher Kräfte die Gleichgewichtslage der kleinsten Teile völlig bestimmt, weil dann die an jedem Teilchen nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte einander gleich sind.

Durch eine Änderung der auf die Körper einwirkenden Kräfte wird auch eine Änderung ihres Gleichgewichtszustandes herbeigeführt, welche Gestaltsänderungen der festen Körper zur Folge haben. So werden Stäbe durch angehängte Gewichte verlängert, durch aufgelegte Gewichte verkürzt, durch Querkräfte gebogen. Infolge dieser Änderung des Gleichgewichtszustandes eines Körpers tritt zwischen den kleinsten Teilchen des Körpers das Bestreben ein, in ihre Gleichgewichtslage zurückzukehren. Diese Rückkehr tritt ein, wenn die Kräfte, welche die Änderung im Gleichgewichtszustande hervorbrachten, aufhören. Über-

schreitet die Verlängerung oder Verkürzung die Elasticitätsgrenze nicht, so nimmt der Stab nach Abnahme der Gewichte seine ursprüngliche Länge und nach einer Biegung seine frühere Lage wieder an.

Bei dieser Rückkehr in den Gleichgewichtszustand treten Bewegungen ein, welche sich, wie folgt, erklären lassen. Wenn nämlich ein Stab von gegebener Länge und gegebenem Querschnitt durch ein angehängtes Gewicht verlängert wird, so ergibt ein Versuch, daß seine Verlängerung als der Zustand, in welchen er durch die dauernde Einwirkung jenes Gewichtes übergeführt wurde, proportional der ziehenden Kraft war und, wenn die durch die Entfernung seiner Teile voneinander auftretende Elasticitätskraft dem ziehenden Gewichte gleich wurde, die Entfernung dieser einzelnen Teile voneinander, der gesamten Verlängerung des Stabes proportional war. Wenn sich aber die einzelnen Teilschichten des Stabes jenen Verlängerungen proportional voneinander entfernt haben, so haben sie sich um genau ebensoweit von ihrer Gleichgewichtslage entfernt.

Da nun die Verlängerungen des Stabes den dehnenden Gewichten innerhalb der Elasticitätsgrenzen proportional sind, und da in dem Zustande der Verlängerung die inneren Kräfte, mit welchen sich die einzelnen Schichten rückwärts anziehen, den dehnenden Gewichten an Größe genau gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind, so folgt, daß die Kraft, mit welcher jede Schichte des Stabes, welche sich nicht in der Gleichgewichtslage befindet, gegen diese hingezogen wird, dem Abstande derselben von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Jede Schichte kehrt nun in ihre Gleichgewichtslage mit beschleunigter Bewegung zurück und besitzt daselbst eine gewisse Geschwindigkeit, mit welcher sie sich über die Gleichgewichtslage hinaus bewegt. Wenn sie dieselbe überschritten hat, so wirken die neuen Kräfte im entgegengesetzten Sinne auf sie ein und heben die der Schichte vorher erteilte Geschwindigkeit auf. Dann aber tritt, da jetzt wieder dieselben Elasticitätskräfte auf die Schicht einwirken, eine rückgängige Bewegung ein, bei der sich der gleiche Vorgang wiederholt. Die Schicht erhält also hierdurch eine schwingende Bewegung. Das Gesetz, nach welchem die in festen Körpern wirkenden Kräfte sich ändern, entspricht dem physikalischen Gesetze der schwingenden Bewegung von kleinsten Teilchen und Reihen von kleinsten Teilchen.

Das Gleiche gilt von den Bewegungen, welche die Teilchen eines durch Stauchung oder Biegung aus seiner Gleichgewichtslage gebrachten Körpers bei der Rückkehr in dieselbe vollführen. Auch in diesen beiden Fällen ist die Stauchung und die Biegung der wirkenden Kraft, also die

bei der Stauchung oder Biegung wirkende elastische Kraft dem Abstande der einzelnen Teilchen von der Gleichgewichtslage proportional. Bei der Rückkehr in dieselbe muß also der Körper ähnliche schwingende Bewegungen ausführen, wie bei den gedehnten Körpern. Die Übertragung einer Kraft (Last) P von ihrem Angriffspunkt auf den Festpunkt eines Stabes erfolgt hiernach durch schwingende Bewegungen seiner kleinsten Teilschichten, indem die dem Angriffspunkte zunächst liegende erste Teilschichte die übernommene Last P auf die zunächst folgende zweite Teilschichte, die zweite Teilschichte die von der ersten Teilschichte übernommene Last P auf die zunächst folgende dritte Teilschichte, also die beliebige m^{te} Teilschichte die von der $(m-1)^{ten}$ Teilschichte übernommene Last P auf die zunächst folgende $(m+1)^{te}$ Teilschicht überträgt, bis die $(n-1)^{te}$ Teilschichte die von der $(n-2)^{ten}$ Teilschichte übernommene Last auf die dem Festpunkte zunächst liegende n^{te} Teilschicht abgegeben hat. Bei dieser Übertragung nimmt dann jede Teilschichte jenen Spannungszustand an, welcher der Elasticität der Stäbe und Stabgefüge entspricht, wie er unter 3. ermittelt worden ist.

Da die festen Körper aus zahlreichen kleinsten Teilen oder Teilschichten zusammengesetzt sind, also in denselben sich zahlreiche Schwingungen der letzteren entwickeln, so läßt sich die Vorstellung von den Schwingungen und ihre Verwertung vereinfachen, wenn man das Verfahren einführt, welches man in der Statik bei Bestimmung der Spannungen in den Querschnitten von Stäben anwendet, indem man dieselben in Mittelkräfte zusammenfaßt. Hiernach würde man an Stelle zahlreicher, nach der gleichen Richtung fortschreitender paralleler Einzelschwingungen eine mittlere Gesamtschwingung mit der gleichen Wirkung wie die gesamten Einzelschwingungen annehmen können.

b) Längsschwingungen.

Wird ein kleinstes Teilchen aus seiner Gleichgewichtslage in a, s. Fig. 28, um die Strecke $ab = w$ verschoben und dann der Wirkung der es in die Ruhelage zurückziehenden Kräfte überlassen, so kehrt es zunächst wieder in seine frühere Lage zurück. Da aber die Kräfte, welche das Teilchen zurückziehen, so lange auf es wirken, bis es die Lage in a wieder erreicht hat, so ist die ihm erteilte Bewegung eine beschleunigte und muß es über a hinaus gegen c bewegen. Von dem Augenblicke an, wo das Teilchen die Ruhelage verlassen hat, wirken

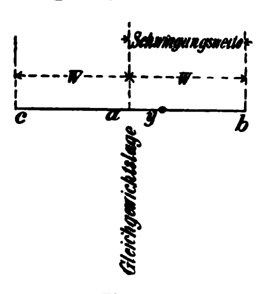


Fig. 28.

die es nach a ziehenden Kräfte wieder ein, indem sie seine Bewegung verzögern, bis die ihm auf dem Wege $b\,a$ erteilte Geschwindigkeit vernichtet ist. Der Abstand $ac = w$ ist gleich dem Abstand $a\,b$, da das bewegte Teilchen die Geschwindigkeit in a nur durch die gegen a gerichteten Kräfte erhalten hatte und dieselben Kräfte es sind, welche dessen Bewegung gehemmt haben. Von c aus wird das Teilchen gerade so nach a zurückkehren, wie vorher von b aus, wird ebenso mit der auf diesem Wege erlangten Geschwindigkeit sich über a nach b, dann von b wieder über a nach c bewegen und so fort. Kurz das Teilchen wird, ähnlich wie ein aus seiner Gleichgewichtslage gebrachtes Pendel, eine hin- und hergehende Bewegung durch den Punkt a ausführen, indem es durch die es nach a hinziehenden Kräfte sich abwechselnd der Gleichgewichtslage nähert und von ihr entfernt. Die Strecke $ab = w$ nennt man die Schwingungsweite und die Zeit, welche das Teilchen brauchte, um den Weg von b nach c und von c nach b zurückzulegen, die Schwingungsdauer.

Nimmt man nun an, daß die durch die Elasticität des Stoffes eines Stabes bedingten Schwingungen und Schwingungsweiten innerhalb der Elasticitätsgrenzen bleiben, so können die Kräfte, welche die schwingenden Bewegungen eines kleinsten Teilchens hervorbringen, dem jeweiligen Abstande y von der Gleichgewichtslage proportional gesetzt werden. Nennt man p die Kraft, womit das kleinste Teilchen nach der Gleichgewichtslage hingezogen wird, für den Abstand $y = 1$ und m die Masse des kleinsten Teilchens, so ist die Beschleunigung, mit welcher das um den Abstand y von seiner Gleichgewichtslage entfernte Teilchen nach der Gleichgewichtslage a hingezogen wird,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{p}{m}y$$

und die Geschwindigkeit, womit dies geschieht, $v = \frac{dy}{dt}$. Da nun $v = \pm\sqrt{\frac{p}{m}}\sqrt{w^2 - y^2}$, worin w die Schwingungsweite darstellt, so ergibt sich

$$\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{\frac{p}{m}}\sqrt{w^2 - y^2}$$

und hieraus

$$\sqrt{\frac{p}{m}}\,dt = \frac{dy}{\sqrt{w^2 - y^2}},$$

also, wenn integriert wird, wobei die Konstante für $y = o$ verschwindet,

$$\sqrt{\frac{p}{m}}\; t = \int_o^y \frac{dy}{\sqrt{w^2 - y^2}} = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{w}\right) \quad . \; . \; . \quad (35)$$

Wird diese Gleichung aufgelöst, so erhält man $\frac{y}{w} = \sin \sqrt{\frac{p}{m}}\, t$, also in der Zeit t den Abstand des kleinsten Teilchens von der Gleichgewichtslage

$$y = w \sin \sqrt{\frac{p}{m}}\, t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Für $t = o$ wird $y = o$, für $\sqrt{\frac{p}{m}}\; t = \frac{\pi}{2}$ wird $y = r$, für $\sqrt{\frac{p}{m}}\, t = \pi$ wird $y = o$, für $\sqrt{\frac{p}{m}}\, t = \frac{3\pi}{2}$ wird $y = -r$, für $\sqrt{\frac{p}{m}}\, t = 2\pi$ wird $y = o$. Beschreibt man nun mit der Schwingungsweite w als Halbmesser einen Kreis, s. Fig. 29, so lassen sich die verschiedenen, der Zeit t entsprechenden Werte von y auf den Halbmessern ac und ab auftragen, woraus hervorgeht, daß die in der gleichen Zeit zurückgelegten Wege verschieden sind.

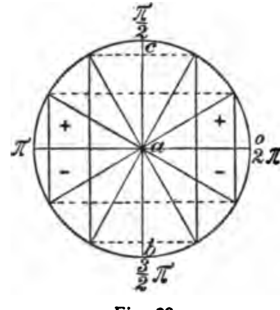


Fig. 29.

Übersichtlicher ergeben sich die Werte von y, wenn man den Umfang des Kreises in eine gerade Linie von $2\pi r$ Länge ausstreckt, dieselbe in 12 gleiche Teile $\frac{2\pi r}{12} = \frac{\pi r}{6}$ einteilt und in den einzelnen Teilpunkten die zugehörigen Sinuswerte als Ordinaten y aufträgt, s. Fig. 30.

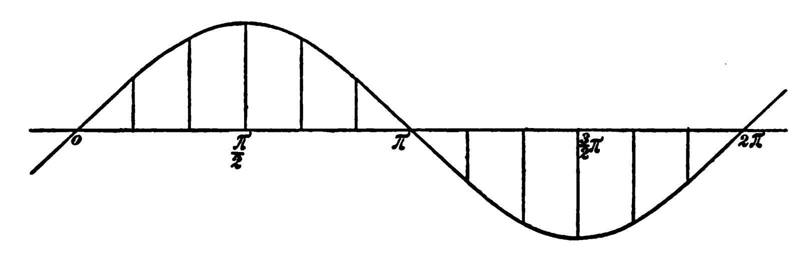


Fig. 30.

Wenn $\sqrt{\frac{p}{m}} = 2\pi$ geworden ist, hat das Teilchen eine ganze Schwingung zurückgelegt, deren Dauer T die Schwingungsdauer der

Bewegung darstellt. Es besteht also die Gleichung $\sqrt{\frac{p}{m}}\,T = 2\pi$, woraus $\sqrt{\frac{p}{m}} = \frac{2\pi}{T}$ und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{p}}$ gefunden wird.

Aus Gleichung (36) erhält man daher auch den Abstand

$$y = w \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Bewegen sich infolge der einwirkenden Kraft die kleinsten Teilchen in gerader Richtung und nach der Längenachse eines geraden Stabes, so finden die Längsschwingungen nur in dieser Richtung statt, indem die kleinsten Teilchen sich abwechselnd einander nähern und von einander entfernen. Hierdurch entsteht eine fortschreitende Bewegung, welche sich in gleichartigem Stabstoffe gleichmäßig fortpflanzt. Hat sich also die Bewegung in einer Zeit t um die Länge x fortgepflanzt, und ist die Zeit $t = nT$, wo T die Schwingungsdauer eines kleinsten Teilchens bedeutet, so hat sich die Länge x in n Teile zerlegt, worin die übrigen kleinsten Teilchen sich ebenso bewegten, wie das erste. Hieraus folgt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung der kleinsten Teilchen konstant ist. Bezeichnet l die Länge eines Stabes, so ist die Schwingungsdauer der Stablänge l proportional.

Nimmt man den zuvor gebrauchten Vergleich der Längsschwingungen kleinster Teilchen mit den Schwingungen des Pendels wieder auf, dessen Schwingungsdauer die gleiche bleibt, während bei der allmälichen Rückkehr in die Gleichgewichtslage seine Schwingungsweiten sich so lange vermindern, bis sie in seiner Gleichgewichtslage null geworden sind, so erkennt man, daß die schwingenden kleinsten Teilchen in die den äußeren Kräften entsprechende Gleichgewichtslage zurückkehren, indem sie ihre Schwingungsweiten allmählich bis auf Null vermindern. In dieser Ruhelage werden die kleinsten Teilchen verbleiben, so lange äußere Kräfte nicht einwirken und ihre Schwingungen beginnen, sobald äußere Kräfte zu wirken angefangen haben.

c) Querschwingungen.

Wirken die bewegenden Kräfte senkrecht zur Längenachse eines Stabes, wodurch auch die Bewegung der kleinsten Teilchen senkrecht zu derselben gerichtet ist, so entstehen Querschwingungen, welche für sich in ähnlicher Weise verlaufen, wie die Längsschwingungen.

Die Längsschwingungen von Stäben treten nun fast nie allein, sondern beinahe stets in Verbindung mit Querschwingungen auf, welche

die Längsschwingungen begleiten und mit ihnen von gleicher Dauer sind. Jedenfalls treten beide Schwingungen unter der Einwirkung von Querkräften gleichzeitig auf und können sich derart zusammensetzen, daß sie krummlinige Bahnen beschreiben.

Die hierüber von Savart angestellten Versuche haben ergeben, daß

1. in Stäben von rechteckigem Querschnitte sowohl die Längsschwingungen als auch die Querschwingungen von den Breiten der Stäbe unabhängig sind,

2. die Längsschwingungen von der Dicke der Stäbe unabhängig, die Querschwingungen derselben umgekehrt proportional sind,

3. die Dauer der Längsschwingungen von Stäben deren Länge, die Dauer der Querschwingungen dem Quadrate von deren Länge proportional ist.

Da hiernach die Dauer der Längsschwingungen der Stäbe ihrer Länge l proportional ist, so folgt, daß bei gleicher Dicke der Stäbe die Dauer der Querschwingungen dem Quadrate der Stablänge l proportional ist. Stellt also ${}^{q}S$ die Dauer der Querschwingung eines Stabes von der Länge l dar, so ist

$$ {}^{q}S = C l^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

worin C eine Konstante darstellt.

Da nun die Dauer der Längsschwingung ${}^{l}S$ der Länge l desselben proportional ist, so ergibt sich

$$ {}^{q}S = C ({}^{l}S)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

d. h. die Gleichung einer quadratischen Parabel. Die Querschwingungsdauer ist hiernach dem Quadrate der Längsschwingungsdauer proportional.

d) Zusammengesetzte Schwingungen.

Wenn sich in einer Reihe kleinster Teilchen zwei Bewegungen fortpflanzen, deren Richtungen einen Winkel miteinander bilden, so erhalten wir die aus dem Zusammenwirken beider Bewegungen gebildete Mittelkraft mit Hilfe des Parallelogrammes der Kräfte. Die Diagonale des aus den beschleunigenden Kräften der Teilbewegungen gebildeten Parallelogrammes stellt die Mittelkraft dieser Kräfte nach Größe und Richtung und somit die Geschwindigkeit und die Bahn des bewegten kleinsten Teilchens dar. Da nach der Voraussetzung jede der Teilbewegungen sich mit gleicher Geschwindigkeit in der Reihe der kleinsten Teilchen fortpflanzt, so sind die Bahnen aller Teilchen dieselben, mithin die Bestimmung der Bahn nur eines Teilchens erforderlich.

Bezeichnet x den Abstand eines kleinsten Teilchens von dem Anfangspunkte der ersten Bewegung und $\lambda = cT$ die zugehörige Wellenlänge, ferner y den Abstand des kleinsten Teilchens von seiner Gleichgewichtslage zur Zeit t, so ist

$$y = w \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \text{ also } \frac{y}{w} = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Nimmt man an, daß der Anfangspunkt der zweiten Bewegung von dem der ersten um a entfernt sei und nennt z den Abstand eines kleinsten Teilchens der zweiten Bewegung von seiner Gleichgewichtslage zu derselben Zeit t, so ist

$$z = \mathfrak{w} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - a}{\lambda}\right), \text{ also } \frac{z}{\mathfrak{w}} = \sin 2\pi \left[\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{a}{\lambda}\right] \quad (41)$$

und, wegen $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$,

$$\frac{z}{\mathfrak{w}} = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \quad (42)$$

Wird Gleichung (40) mit $\cos 2\pi \frac{a}{\lambda}$ multipliciert und dann von Gleichung (42) abgezogen, so ergibt sich:

$$\frac{z}{\mathfrak{w}} - \frac{y}{w} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \quad . \quad . \quad (43)$$

Wird diese Gleichung quadriert und zugleich addiert, so ergibt sich

$$\left(\frac{z}{\mathfrak{w}}\right)^2 + \left(\frac{y}{w}\right)^2 \left(\sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos^2 2\pi \frac{a}{\lambda}\right) - 2 \frac{z}{\mathfrak{w}} \cdot \frac{y}{w} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} =$$

$$\sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \left\{\sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\}$$

und hieraus

$$\left(\frac{z}{\mathfrak{w}}\right)^2 + \left(\frac{y}{w}\right)^2 - 2 \frac{z}{\mathfrak{w}} \cdot \frac{y}{w} \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \quad . \quad . \quad (44)$$

Gleichung (44) ergibt den Abstand des kleinsten Teilchens von der Gleichgewichtslage parallel zur Richtung der ersten Bewegung für jeden Wert, den der Abstand des kleinsten Teilchens parallel zu der zweiten Bewegung erhalten kann, s. Fig. 31. Da nun alle Punkte p' p'' . . p, deren zusammengehörige Abstände y' y'' w und z' z'' $\mathfrak{w}$ parallel zu den zwei festen Richtungen YY und ZZ mit dem Schnittpunkte A

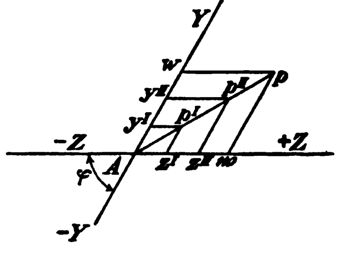


Fig. 31

sind, auf einer Ellipse mit dem Mittelpunkt A liegen, so stellt Gleichung (44) die elliptische Bahn dar, in welcher sich die kleinsten Teilchen um ihre Gleichgewichtslage bewegen, s. Fig. 32.

Ist der Unterschied in den Abständen der kleinsten Teilchen der beiden zusammengehörigen Bewegungen gleich Null oder gleich einer geraden Zahl von halben Wellenlängen, so ist in Gleichung (44) $\cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = 1$ und $\sin 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0$, woraus

$$\frac{y^2}{w^2} - \frac{2yz}{w \cdot \mathfrak{w}} + \frac{z^2}{\mathfrak{w}^2} = 0 \text{ oder } \frac{y}{w} - \frac{z}{\mathfrak{w}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

In diesem Falle verhalten sich also die Abstände y und z wie die zugehörigen Schwingungsweiten w und $\mathfrak{w}$ und Gleichung (44) erhält dann die Form

$$\frac{y^2}{w^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{w}^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Werden noch die beiden Schwingungsweiten gleich, also $\mathfrak{w} = w$, während die Bewegungsrichtungen zueinander senkrecht sind, so erhält man

$$\frac{y^2}{w^2} + \frac{z^2}{w^2} = 1, \text{ also } y^2 + z^2 = w^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

d. h. die Gleichung eines Kreises mit dem Halbmesser w.

Wenn man in einer Reihe der kleinsten Teilchen, welche durch innere Kräfte im Gleichgewicht erhalten werden, einem dieser kleinsten Teilchen eine schwingende Bewegung erteilt, so wird hierdurch das Gleichgewicht nicht nur dieses einzelnen Teilchens, sondern das der ganzen Reihe gestört. Indem das einzelne Teilchen seine Lage ändert, wird das Gleichgewicht zunächst der ihm nächsten Teilchen gestört und dann von diesen die Gleichgewichtsstörung auf alle übrigen übertragen. Da jedes kleinste Teilchen das Bestreben hat, aus seiner veränderten Lage in seine Gleichgewichtslage zurückzukehren, so entstehen in der Reihe hin- und hergehende Bewegungen der kleinsten Teilchen, welche, da jene Bewegungen nacheinander beginnen, verschiedene Abstände von ihrer Ruhelage annehmen. Trägt man alle diese durch diese Bewegungen gleichzeitig erzeugten Abstände von ihrer Gleichgewichtslage auf und verbindet ihre Endpunkte, so erhält man eine wellenförmige Linie als das Bild ihrer augenblicklichen gegenseitigen Lage, s. Fig. 33, bei welcher jede Welle aus einem Wellenberg und einem Wellental gebildet ist. Die größte Höhe des Wellenberges, welche der größten Tiefe des Wellentales gleich ist, ist die Schwingungs-

weite $w = de = fg$ und die Zeit T, in welcher das Teilchen den Weg einer ganzen Ellipse zurücklegt, dessen große lothrechte Achse $2w = de + fg$ ist, die Schwingungsdauer. Hat sich die Bewegung in einer Zeit t um die Länge x fortgepflanzt und ist $t = nT$, so hat sich x in n Teile von der Länge einer Welle zerlegt, in welchen sich alle kleinsten Teilchen ähnlich bewegen, wie in dem ersten Teile. Wenn also die Schwingungsdauer dieselbe ist, so muß, da während der Zeit T die schwingende Bewegung sich um die Länge einer Welle fortpflanzt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung konstant sein.

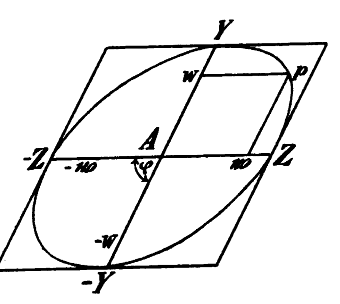


Fig. 32.

Wird in einer Reihe kleinster Teilchen in einem solchen Teilchen eine schwingende Bewegung erregt, so pflanzt sich dieselbe nach beiden Seiten hin fort und kehrt von den Enden der Reihe in entgegengesetzter

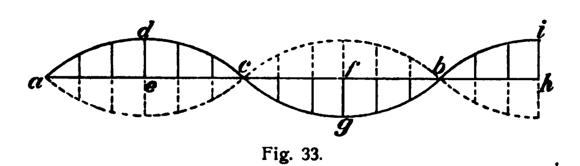


Fig. 33.

Richtung zurück, s. Fig. 33. Die Reihe teilt sich daher in Strecken von der Länge einer halben Wellenlänge, in deren jeder alle Teilchen sich in demselben Schwingungszustand, aber mit der entgegengesetzten Bewegungsrichtung, befinden. Diejenigen Teilchen c, b der Reihe, bei welchen stets gleichzeitig ein Wellenberg und ein Wellental hindurchgeht, befinden sich stets in der Gleichgewichtslage und heißen deshalb Schwingungsknoten. Die mitten zwischen den Schwingungsknoten liegenden Teilchen haben die größten Schwingungen, weil dort stets gleichzeitig zwei Wellenberge oder zwei Wellentäler zusammentreffen. Die kleinsten Teilchen einer Strecke haben eine um so kleinere Schwingungsweite, je näher sie den ruhenden Teilchen liegen. Man nennt daher die schwingende Bewegung daselbst eine stehende und die zwischen zwei ruhenden Teilchen enthaltene Strecke eine stehende Welle.

Diese Schwingungen der kleinsten Teilchen der Körper lassen sich an Stäben sichtbar machen, indem man dieselben durch Klopfen oder Streichen in einen schwingenden Zustand versetzt und sie dann mit

feinem Sande bestreut, dessen Körnchen durch die neuen Schwingungen der kleinsten Teilchen fortbewegt werden und nach den Schwingungsknoten hineilen, wo sie sich ansammeln und so zugleich die halbe Länge einer Welle angeben.

Stellt man eine Reihe kleinster Teilchen dar, welche zusammengesetzte Schwingungen ausführen, so lassen sich die Lagen der ersteren in der zugehörigen Wellenlinie ermitteln, welche dem Zustande der Wellenbewegung in einem gegebenen Augenblick entsprechen.

Die zusammengesetzten Schwingungen nehmen bei gleichen Schwingungsweiten die Form von Kreisen an, bei welchen gleiche Kreisteile von den kleinsten Teilchen in gleichen Zeiten durchlaufen werden. Trägt man nun die Durchmesser der Kreise als Abscissen und die zugehörigen Abstände von der Gleichgewichtslage als Ordinaten auf und verbindet die Endpunkte der letzteren durch je eine Linie, s.

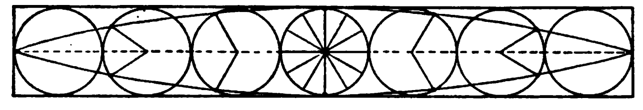


Fig. 34.

Fig. 34, so stellen diese Linien die zugehörigen Wellenlinien dar, welche annähernd quadratische Parabeln bilden.

Nehmen die zusammengesetzten Schwingungen die Form von Ellipsen an, so sind zunächst die in gleichen Zeiten durchlaufenen ungleichen Bogenlängen zu ermitteln und hiernach die elliptischen Bogen einzuteilen. Werden nun die Zeiten als Abscissen und die zugehörigen Abstände dieser Teilpunkte von der Gleichgewichtslage als Ordinaten aufgetragen und die Endpunkte der letzteren durch je eine Linie verbunden, s. Fig. 5 auf Tafel I, so stellen diese Linien die zugehörigen Wellenlinien dar.

Hiernach würde noch zu untersuchen sein, in welcher Weise die in Kreisen oder Ellipsen schwingenden kleinsten Teilchen ihre schwingende Bewegung von einem auf das andere übertragen und welcher Weg der Übertragung sich hierbei ergibt. Nach den früheren Untersuchungen, wonach die im Inneren von Stäben entwickelten Übertragungslinien quadratische Parabeln darstellen, liegt die Vermutung nahe, daß die zusammengesetzten Schwingungen der kleinsten Teilchen Mittelschwingungen erzeugen, deren Verlauf den früher statisch ermittelten quadratisch-parabolischen Übertragungslinien folgt, daß also die Übertragung von Kräften im Inneren von Stäben durch die Bewegung ihrer kleinsten Teilchen jenen statischen Gesetzen entspricht.

9. Übertragung äußerer Kräfte durch Schwingungen von Stäben auf deren Festpunkte.

a) Übertragung von Längsschwingungen.

Wird ein an einem Ende befestigter elastischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt $q = 1$ innerhalb der Elasticitätsgrenzen durch eine Last Z in der Richtung seiner Längenachse gezogen s. Fig. 11, so beträgt nach Gleichung 8 dessen elastische Verlängerung $\lambda_z = \frac{Zl}{E}$, welche nach Entfernung der Last Z wieder verschwindet. Wenn unter Einwirkung der Last Z, also bei der Verlängerung im Inneren des Stabes Gleichgewicht eingetreten ist, so folgt hieraus, daß die voneinander entfernten Schichten der kleinsten Teilchen sich mit der dem Gewichte Z gleichen Kraft anziehen und daß nach der Entfernung des Gewichtes Z diese Anziehung verschwindet, daß also der Stab in seinen ursprünglichen Zustand der Länge und des Abstandes seiner kleinsten Teilchen zurückkehrt. Jene Anziehung der kleinsten Teilchen eines Stabes bezeichnet den Zustand seiner Zugspannung.

Wird derselbe Stab innerhalb der Elasticitätsgrenze durch eine Last D in der Richtung seiner Längenachse gedrückt, s. Fig. 11, so beträgt nach Gleichung 14 dessen elastische Verkürzung $\lambda_d = \frac{Dl}{E}$, welche nach Entfernung der Last D wieder verschwindet. Wenn unter Einwirkung der Last D, also bei der Verkürzung im Inneren des Stabes, Gleichgewicht eingetreten war, so folgt hieraus, daß die einander genäherten Schichten der kleinsten Teilchen sich mit der dem Gewichte D gleichen Kraft abstoßen und daß nach Entfernung des Gewichtes D diese Abstoßung verschwindet, also der Stab in seinen ursprünglichen Zustand der Länge und der Entfernung seiner kleinsten Teilchen zurückkehrt. Jene Abstoßung der kleinsten Teilchen eines Stabes bezeichnet den Zustand seiner Druckspannung.

Hiernach ist allgemein anzunehmen, daß innerhalb der Elasticitätsgrenze alle Stäbe eines Stabgefüges, welche unter Einwirkung von Zug- oder Druckkräften in der Richtung ihrer Längsachsen verlängert oder verkürzt worden sind, nach dem Aufhören dieser Kräfte in den ursprünglichen Zustand ihrer Länge und des Abstandes ihrer kleinsten Teilchen zurückkehren. Die Lasten $-Z$ und $+D$ müssen von den zugehörigen Festpunkten durch die gleichen und entgegengesetzten Kräfte $+Z$ und

— D aufgenommen, also von ihren Angriffspunkten bis zu ihren Festpunkten übertragen werden. Diese Übertragung der Lasten erfolgt durch die von ihnen in den Stäben erzeugten Längsschwingungen, welche sich von den Angriffspunkten der Lasten bis zu den Festpunkten der Stäbe fortpflanzen und hierbei die oben erwähnten Spannungszustände der Stäbe hervorrufen. Die Lasten sind mithin die Ursache der Längsschwingungen und die Spannungen die Folge dieser Längsschwingungen. Ist λ_z und E für einen Stab von der Länge l bekannt, so ergibt sich umgekehrt bezw. die Kraft

$$Z = \frac{\lambda_z}{l} \cdot E$$

und

$$D = \frac{\lambda_d}{l} \cdot E.$$

Man kann also aus der Spannung eines Stabes auf die Kraft, welche diese Spannung und die ihr entsprechende Längsschwingung erzeugt hat, schließen.

b) Übertragung durch Querschwingungen.

Wird ein Stab von der Länge l und dem Querschnitt F von einer einzelnen Querkraft P in dem Abstand x vom Festpunkt 1 gebogen, s. Fig. 35, so muß der Anteil $P\frac{(l-x)}{l}$ auf den Festpunkt 1, der Anteil $P \cdot \frac{x}{l}$ auf den Festpunkt I übertragen und an beiden Punkten von dem gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Gegendruck der Unterlage aufgenommen werden.

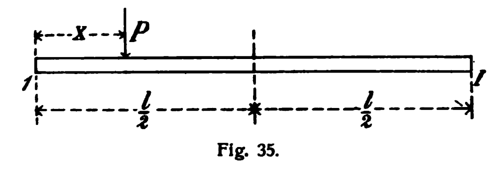


Fig. 35.

Für $x = o$ wird dieser Gegendruck in 1 gleich P, in I gleich o, für $x = l$ wird derselbe in 1 gleich o, in I gleich P. Für einen Querschnitt im Abstande x und $l - x$ von dem Stützpunkte 1 bezw. I ist das Angriffsmoment

$$^aM = P\frac{(l-x)}{l} \cdot x = P\frac{x}{l}(l-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Dasselbe wird für $x = o$ und $x = l$ Null und erreicht wegen $\frac{d^aM}{dx} = P - 2P\frac{x}{l} = o$ für $x = \frac{l}{2}$, also für den Querschnitt in der

Mitte seinen größten Wert $P\frac{l}{4}$. Das Widerstandsmoment für einen beliebigen Querschnitt ist nach Fig. 13 und 14

$$^{w}M = H_d \cdot y_d + H_z \cdot y_z \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

worin H_d und H_z bezw. die wagrechte Druck- und die wagrechte Zugkraft, y_d und y_z bezw. deren auf die neutrale Schichte des Stabes bezogenen veränderlichen Hebelarm bedeutet.

Werden mit d und z bezw. die Druck- und Zugfestigkeit des Stabstoffes, mit $\frac{h}{2}$ und $\frac{h}{2}$ die Abstände der äußersten Schichten des gedrückten und des gezogenen Teiles von der neutralen Schichte, mit f_d und f_z deren Flächeninhalte bezeichnet, so ist $\frac{d}{h/2}$ und $\frac{z}{h/2}$ bezw. die Druck- und Zugspannung in der Einheitsentfernung von der neutralen Schichte, also die wagrechte Druck- bezw. Zugkraft

$$(50) \quad \ldots \quad H_d = \frac{d}{h/2} y_d \cdot f_d \quad \text{und} \quad H_z = \frac{z}{h/2} y_z \cdot f_z \quad \ldots \quad (51)$$

Die Druckspannungen $\frac{d}{a_d} \cdot y_d$ und Zugspannungen $\frac{z}{a_z} \cdot y_z$ werden für $y_d = o$ und $y_z = o$, also in der neutralen Schichte null, wachsen proportional mit y_d und y_z und nehmen für $y_d = a_d$ und $y_z = a_z$ den größten Wert an.

Setzt man das Angriffsmoment der Last $P/2 = 2\,P/4$ aus Gleichung (48) dem Widerstandsmomente des gedrückten und des gezogenen Querschnittsteiles aus Gleichung (49) gleich, so ist bezw.

$$(52) \quad P/4 \cdot \frac{x\,(l-x)}{l} - H_d \cdot y_d = o \quad \text{und} \quad P/4 \frac{x\,(l-x)}{l} - H_z \cdot y_z = o \quad (53)$$

Für $x = \frac{l}{2}$ und $y_d = {}^2/_3 \frac{h}{2} = a_d$ bezw. $y_z = {}^2/_3 \cdot \frac{h}{2} = a_z$ erhält man

$$(54) \quad . \quad P/4 \cdot \frac{l}{4} - H_d \cdot a_d = o \quad \text{und} \quad P/4 \cdot \frac{l}{4} - H_z \cdot a_z = o \quad . \quad (55)$$

Werden die zueinander gehörigen Gleichungen dividiert, so ergeben sich die Gleichungen der in Fig. 36 dargestellten quadratischen Parabeln:

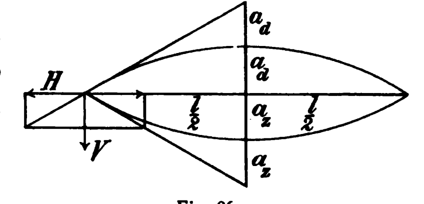


Fig. 36.

$$(56) \quad \ldots \quad y_d = \frac{a_d}{(l/2)^2} x\,(l-x) \quad \text{und} \quad y_z = \frac{a_z}{(l/2)^2} x\,(l-x) \quad \ldots \quad (57)$$

Ganz dieselben Gleichungen erhält man, wenn statt der in der Mitte des Stabes wirkenden Einzellast $\frac{P}{2}$ eine über die ganze Stablänge gleichförmig verteilte Last $\frac{pl}{2}$, s. Fig. 37, angenommen worden ist. Differentiiert man diese Gleichungen nach x, so erhält man bezw.

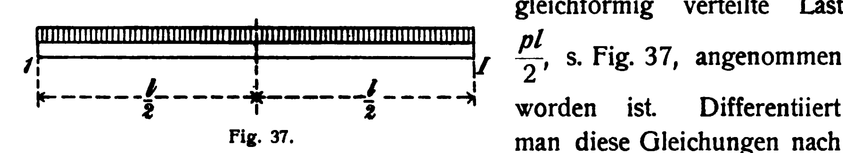


Fig. 37.

$$(58) \quad \frac{dy_d}{dx} = \frac{a_d}{(l/2)^2}(l-2x) \text{ und } \frac{dy_z}{dx} = \frac{a_z}{(l/2)^2}(l-2x) \quad (59)$$

Setzt man hierin $x = \frac{l}{2}$, so erhält man $\frac{dy_d}{dx} = \frac{dy_z}{dx} = o.$

Für $x = o$ erhält man bezw.

$$(60) \quad \frac{dy_d}{dx} = 4\frac{a_d}{l} \text{ und } \frac{dy_z}{dx} = 4\frac{a_z}{l} \quad (61)$$

Hieraus folgt, daß die Tangenten der Parabeln in der Stabmitte wagrecht sind und an den Stabenden einen Winkel α einschließen, welcher bezw.

$$(62) \quad \text{tang}\,\alpha_d = 2\frac{a_d}{l/2} \text{ und } -\text{tang}\,\alpha_z = 2\frac{a_z}{l/2} \quad (63)$$

ist. Zerlegt man die Kräfte, welche unter diesen Winkeln in 1 und I wirken, in je eine lotrechte und eine wagrechte Seitenkraft V_d, H_d und V_z, H_z, so erhält man bezw.

$$(64) \quad V_d = \frac{P}{4};\ H_d = -\frac{P/4}{\text{tang}\,\alpha_d} = -\frac{P/4}{2a_d}\cdot l/2 = -\frac{Pl}{16a_d} \quad (65)$$

und

$$(66) \quad V_z = \frac{P}{4};\ H_z = \frac{P/4}{\text{tang}\,\alpha_z} = \frac{P/4}{2a_z}\cdot l/2 = \frac{Pl}{16a_z} \quad (67)$$

Hieraus folgt

$$(68) \quad V_d + V_z = \frac{2P}{4} = \frac{P}{2} \text{ und wenn } a_d = a_z \text{ wird, } H_z + H_d = o \quad (69)$$

d. h. in den Stützpunkten 1 und I summieren sich die übertragenen Lasten zu je einer abwärts gerichteten Vertikalkraft, welche durch den gleich großen lotrechten Gegendruck $P/2$ aufgehoben werden muß, während die beiden in den Stützpunkten 1 und I ausgeschiedenen Horizontalkräfte sich gegenseitig vernichten.

Damit sich das Gleichgewicht der inneren Stabkräfte herstellen kann, ist anzunehmen, daß sich außer den in gerader Richtung fortgepflanzten Längsschwingungen auch Querschwingungen in dem Stabe entwickeln, welche sich mit den ersteren so zusammensetzen, daß die vereinigten Schwingungen sich in der Richtung der quadratischen Parabel bis zu den Festpunkten erster Ordnung 1 und I fortpflanzen können. Diese Querschwingungen müssten sich also zwischen den Festpunkten 1 und I gleichmäßig verteilen und mit den über den ganzen Querschnitt verteilten Längsschwingungen in dem gedrückten und gezogenen Querschnittsteile des Stabes zusammengesetzte Schwingungen bilden, deren Mittelschwingungen in dem über und unter der neutralen Schichte befindlichen Teile des Stabes bezw. parabolische Druck- und Zuglinien erzeugen.

c) Übertragung durch Längs- und Querschwingungen.

Wird ein Stab von der Länge l, der Breite 1 und der Höhe $h = a_d + a_z$ gleichzeitig durch eine Längs- und eine in der Mitte wirkende Querkraft P beansprucht, so ergeben sich oberhalb und unterhalb der neutralen Schichte zusammengesetzte Spannungen. Bezeichnet man die durch die Biegung erzeugte Druckspannung und Zugspannung bezw. mit d_b und z_b, während d und z bezw. die Druckspannung und Zugspannung durch die Längskraft darstellt, so ergibt sich, wenn diese Längskraft eine Druckkraft ist, oberhalb und unterhalb der neutralen Schichte des Querschnittes bezw. die zusammengesetzte Spannung $d_b + d$ und $z_b - d$. Ist jene Längskraft eine Zugkraft, so sind diese zusammengesetzten Spannungen oberhalb und unterhalb der neutralen Schichte bezw. $z - d_b$ und $z + z_b$. Da die Spannungen in der Einheitsentfernung von der neutralen Schichte innerhalb der Elasticitätsgrenzen gleich sind, so erhält man bezw.

$$\text{(70)} \quad \frac{d + d_b}{a_d} = \frac{d - z_b}{a_z} \quad \text{und} \quad \frac{z + z_b}{a_z} = \frac{z - d_b}{a_d} \quad \text{(71)}$$

und hieraus bezw.

$$a_d = \frac{d + d_b}{2d + d_b - z_b} \cdot h, \text{ also } a_z = h - a_d \quad \text{(72)}$$

und

$$a_z = \frac{z + z_b}{2z + z_b - d_b} \cdot h, \text{ also } a_d = h - a_z \quad \text{(73)}$$

Trägt man in der Mitte des Stabes oberhalb und unterhalb der neutralen Schichte die Höhen $\frac{4}{3} a_d$ und $\frac{4}{3} a_z$ auf, s. Fig. 38, welche die

Pfeilhöhen der oberen und unteren parabolischen Fortpflanzungslinien darstellen, so sind dies die Fortpflanzungswege der zusammengesetzten

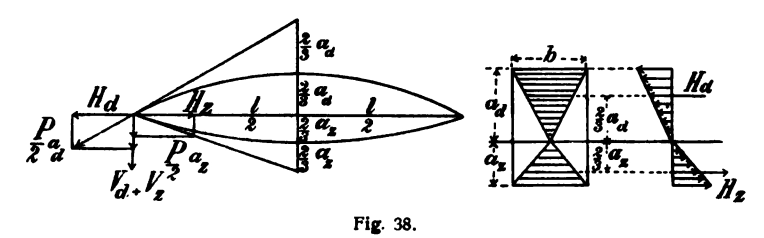


Fig. 38.

Schwingungen, deren Tangenten in der Stabmitte wagrecht sind und an den Festpunkten 1 und I oben und unten bezw. die Werte annehmen:

$$(74) \quad \ldots \quad \operatorname{tang} \alpha_d = 2 \cdot \frac{\frac{2}{3} a_d}{l/2} \text{ und } \operatorname{tang} \alpha_z = 2 \cdot \frac{\frac{2}{3} a_z}{l/2} \quad \ldots \quad (75)$$

Hieraus ergeben sich alsdann die Werte:

$$(76) \quad . \quad V_d + V_z = \frac{P}{2}, \; H_d \operatorname{tang} \alpha_d = V_d \text{ und } H_z \operatorname{tang} \alpha_z = V_z \; . \quad (77)$$

also wegen $H_d = H_z$ auch

$$\frac{V_d}{\operatorname{tang} \alpha_d} = \frac{V_z}{\operatorname{tang} \alpha_z} \quad \ldots \ldots \quad (78)$$

und hieraus

$$V_z = V_d \frac{\operatorname{tang} \alpha_z}{\operatorname{tang} \alpha_d} \text{ also, wenn dies eingeführt wird,}$$

$$V_d \left(1 + \frac{\operatorname{tang} \alpha_z}{\operatorname{tang} \alpha_d}\right) = \frac{P}{2}, \text{ und } V_d = \frac{P}{2} \cdot \frac{\operatorname{tang} \alpha_d}{\operatorname{tang} \alpha_d + \operatorname{tang} \alpha_z} \quad (79)$$

$$V_z \left(1 + \frac{\operatorname{tang} \alpha_d}{\operatorname{tang} \alpha_z}\right) = \frac{P}{2}, \text{ und } V_z = \frac{P}{2} \cdot \frac{\operatorname{tang} \alpha_z}{\operatorname{tang} \alpha_d + \operatorname{tang} \alpha_z} \; . \quad (80)$$

ferner

$$H_d = \frac{V_d}{\operatorname{tang} \alpha_d} = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha_d + \operatorname{tang} \alpha_z} \; . \quad (81)$$

und

$$H_z = \frac{V_z}{\operatorname{tang} \alpha_z} = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha_d + \operatorname{tang} \alpha_z} \; . \quad (82)$$

Trägt man in der Mitte des Stabes, welcher zugleich durch Längsschwingungen und Querschwingungen beansprucht ist, oberhalb und unterhalb der neutralen Schichte die Höhe $\frac{2}{3} a_d$, welche hier die kleinere, und $\frac{2}{3} a_z$, welche hier die größere ist, auf, so stellen sie die Pfeilhöhen der oberen und unteren parabolischen Fortpflanzungs-

linien, s. Fig. 39, dar. Nach dem früheren sind deren Tangenten in der Stabmitte wagrecht und nehmen von den Festpunkten 1 und I oben

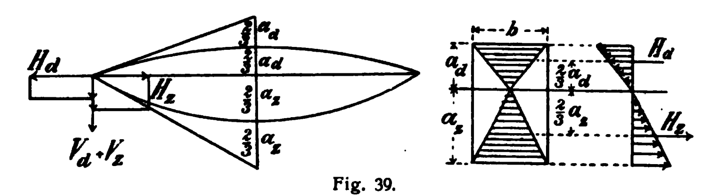


Fig. 39.

und unten bezw. die Werte in Gleichung 74 und 75 an. Hieraus lassen sich die Vertikalkräfte V_d und V_z, sowie die Horizontalkräfte H_d und H_z bezw. aus den Gleichungen 79, 80 und 81, 82 bestimmen.

Für einen in der Mitte mit P belasteten Stab von der Länge l mit I-förmigem Querschnitt, s. Fig. 40, dessen über und unter der

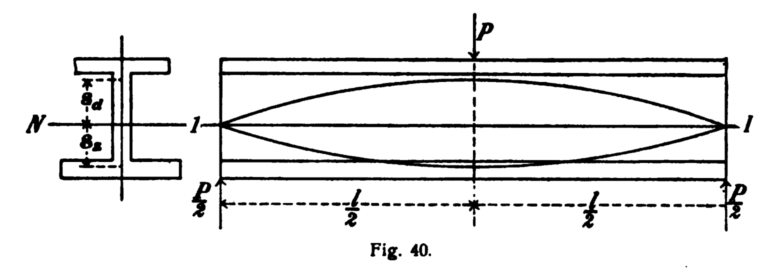


Fig. 40.

neutralen Schichte gelegener Teil seinen Schwerpunkt bezw. in dem Abstande s_d und s_z von derselben hat, erhält man über dem Stützpunkte 1

$$\text{(83)} \quad \ldots \quad \text{tang}\ \alpha_d = 2\frac{s_d}{l/2} \quad \text{und} \quad \text{tang}\ \alpha_z = 2\frac{s_z}{l/2} \quad \ldots \quad \text{(84)}$$

d. h. die Tangenten an die beiden parabolischen Übertragungswege über den Stützpunkten 1 I, während ihre Tangenten in der Mitte des Stabes wagrecht sind.

10. Darstellung der Übertragung von Längs- und Querkräften in Stäben auf deren Stützpunkte durch Versuch.

Die für den vorliegenden Versuch benutzte Bauwage, s. Tafel I, besteht in einem mit Füßen c und einem Falz a, s. Fig. 3, versehenen rechteckigen Rahmen B, in welchen sich eine ebene, mit starken Hirnleisten versehene Tafel A schließend einsetzen und mittelst einer vom

unteren wagrechten Schenkel des Rahmens angebrachten Leiste *b*, s. Fig. 3, und zweier am oberen wagrechten Rahmschenkel angebrachten Verreiber *c* an den Falz *a* anpressen läßt. Durch vier an den Füßen *c* befindliche lotrechte Stellschrauben *d* und mit Hilfe einer auf den oberen Rahmschenkel aufgesetzten Röhrenlibelle kann die Ebene der Tafel und des Rahmens genau lotrecht, und zwar so eingestellt werden, daß der obere und untere Rahmschenkel des letzteren genau die wagrechte Lage annehmen.

Die Tafel *A* ist zur Aufnahme des durch den Versuch zu prüfenden Zeichnungsblattes bestimmt, welches in genauer Lage und faltenlos an allen vier Ecken mittelst Heftstiften an der Tafel befestigt ist. Da der zu prüfende Stab links und rechts von seiner Mitte symmetrisch ist, so genügt der Versuch für seine linke Hälfte und bedarf hierzu zweier Stützpunkte. Der erste dieser Stützpunkte *e* besteht in einem Stift zum Aufhängen einer Seidenkordel an einem in Grade eingeteilten, zur Bestimmung des Aufhängewinkels dienenden Quadranten, der in einer Führungsnut *g*, s. Fig. 2, des lotrechten Rahmschenkels rechts verschieblich ist und mittelst einer auf der Rückseite angebrachten Klemmschraube *g'* in jeder beliebigen Höhenlage festgestellt werden kann. An dem Quadranten befindet sich die Leitrolle *h* für einen starken seidenen Faden, der mit dem einen Ende an dem Stützpunkt I mit der Seidenkordel verbunden wird und an dem anderen Ende eine Wagschale *D* zum Abwägen des Gegendruckes der Endstütze trägt. Die Rolle *h* sitzt an einem um *k* drehbaren Arme, welcher mittelst der Bremsschraube *l*, s. Fig. 4, für einen beliebigen Grad der Kreisteilung so festgestellt werden kann, daß der Verbindungsfaden dem Aufhängewinkel der Kordel entspricht.

An dem lotrechten Rahmschenkel links läßt sich eine zweite Rolle *p* in einer Führungsnut *p'* verschieben und mittelst einer Klemmschraube *q* an dem Rahmen festbremsen. Über die Rolle *p* führt wagrecht ein seidener Faden, welcher an dem einen Ende *r* mit dem Scheitel der Seidenkordel verbunden ist und am anderen Ende eine zweite Wagschale *F* zum Abwägen der in dem Scheitel wirkenden wagrechten Kraft trägt.

Um den Stützpunkt *e* und den Scheitel *r* in die der Bildtafel entsprechende Lage bringen zu können, ist die innere Kante des oberen wagrechten, sowie diejenige des lotrechten Rahmschenkels links und rechts mit einem Centimetermaßstab versehen. Die aufzuhängende Seidenkordel wird mittelst eines kleinen S-förmigen Hakens an den Stift *e* so aufgehangen, daß sie den zur Erkennung des Gleichgewichts-

zustandes erforderlichen geringen Spielraum gewährt. Die Seidenkordel nimmt an den geeigneten Punkten an leichten Häkchen die Belastungen auf, welche aus kleinen, mit eingegossenen Haken versehenen Bleicylindern von je 5 g bestehen.

Um die Übertragung der Längs- und Querspannungen im Inneren eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt von 600 cm Länge und 120 cm Höhe in dem Maßstabe von $\frac{1}{10}$ der wirklichen Größe darzustellen, ergibt sich die halbe Stützweite der Seidenkordel zu $\frac{l}{2} = 30$ cm und deren Pfeilhöhe $f = \frac{12}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$ cm. Man läßt nun in gleichen wagrechten Abständen $\lambda = 1{,}35$ cm 23 Gewichte von je 5 g und in der Mitte ein Gewicht von 2,5 g, also ein Gesamtgewicht $V = 2{,}5 + 5.23 = 117{,}5$ g wirken, wobei die Einzelgewichte den gleichförmig auf die halbe Stützweite verteilten Querschwingungen entsprechen sollen. Bringt man nun an dem freien Ende r der Seidenkordel eine wagrechte Kraft an, welche die Mittelkraft aller Längskräfte darstellen soll, und

$$H = \frac{1}{f} \cdot {}^{a}M = \frac{1}{4}\left[\frac{5}{2} \cdot 30 + 5 \cdot 1{,}25\,(1 + 2 + \ldots 23)\right] = \frac{1800}{4} = 450 \text{ g}$$

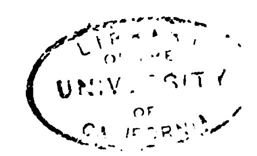
beträgt, während am anderen Ende der biegsamen Kordel eine unter dem Winkel $\alpha = 53^0\,7'$, dessen Tangente $\frac{2 \cdot 4}{30} = 0{,}266$ beträgt, geneigte Kraft $T = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{450^2 + 117{,}5^2} = 465{,}09$ g das Gleichgewicht herstellt, so entspricht die von dem biegsamen Körper gebildete Fortpflanzungslinie der die Längs- und Querspannungen darstellenden Längs- und Querkräfte genau einer quadratischen Parabel. Dieselbe bezeichnet also den durch statische Berechnung ermittelten und durch Versuch bestätigten Übertragungsweg der zu Grunde gelegten Längs- und Querkräfte. Wahrscheinlich bleibt, daß dieser Weg mit demjenigen mittleren Wege zusammenfällt, welcher durch das Zusammenwirken der entsprechenden Längs- und Querschwingungen erzeugt wird.

11. Übertragung äußerer Kräfte in Stabgefügen.

a) Form und Richtung des Übertragungsweges.

α) Stabgefüge mit geraden parallelen Gurten.

Wird der in der Mitte des Paralleltrapezträgers 1 2 II I, s. Fig. 26, befindliche Festpunkt (6 VI) durch die Einzellast P beschwert, während alle übrigen Festpunkte n. O. unbelastet bleiben, so wird jede Hälfte dieser Last P durch die Festpunkte 5 4 3 2 und V. IV. III. II. n. Ordnung bezw.



auf die Festpunkte e. O. 1 und I übertragen, wo sie die lotrechten Stützendrücke je $1 = I = P_l 2$ erzeugt.

Diese Übertragung ist nur möglich, indem die kleinsten Teilchen dieser Stäbe die auf sie einwirkende Kraft von ihrem einen bis zum anderen Ende, und zwar so lange fortpflanzen, bis die Festpunkte erster Ordnung 1 und I erreicht sind. Die hierdurch in der Lage der kleinsten Teilchen dieser Stäbe verursachten Veränderungen bilden deren Spannung und ergeben sich als Zug- oder Druckspannungen, je nachdem die Kraft am unteren oder oberen Ende eines Stabes angreift, also dieselben bezw. zu verlängern oder zu verkürzen sucht. Die Spannung eines Stabes besteht also in dem Zustande, in welchen er durch die veränderte Lage seiner kleinsten Teilchen durch die in seinem Inneren von äußeren Kräften hervorgerufenen Längsspannungen versetzt worden ist. Die Zugspannung eines Stabes entspricht nun einer Entfernung, die Druckspannung eines Stabes einer Annäherung seiner kleinsten Teilchen.

In dem vorerwähnten Träger nehmen hiernach die Stäbe 6 5, 4 3, 2 1 und VI V, IV III, II I eine Druckspannung, die Stäbe 5 4, 3 2 und V IV, III II eine Zugspannung an.

Die hierdurch veranlaßte Verschiebung der kleinsten Stabteilchen vollzieht sich unter Einwirkung der Kraft P, indem sie links den Zickzackweg 6 5 4 3 2 1, rechts den Zickzackweg VI V IV III II I durchläuft.

Wirkt die Last P in einem anderen, z. B. im Festpunkte n. O. (4 VIII) des in Fig. 27 dargestellten Paralleltrapezträgers, so wird die Teillast $P_l = P\frac{b}{l}$ links über die Festpunkte 3 2 nach dem linken Festpunkte 1, die Teillast $P_r = P\frac{a}{l}$ über die Festpunkte VII VI V IV III II nach dem rechten Festpunkte I übertragen. Ähnlich würden sich die Übertragungen aller einseitig wirkenden Lasten in ähnlichen Stabgefügen vollziehen.

So lange die Last P auf die Stabgefüge einwirkt, verharren deren einzelne Stäbe in dem erzeugten Spannungszustande, wobei die kleinsten Teilchen der Zugstäbe etwas voneinander entfernt, die kleinsten Teilchen der Druckstäbe etwas einander genähert sind. Die in den Festpunkten erster Ordnung 1 I einerseits wirkenden Gegendrücke und die in dem Festpunkte niederer Ordnung (4 VIII) angreifende Kraft halten sich hierbei das Gleichgewicht. Die Gegendrücke in den Festpunkten erster Ordnung 1 I stehen also in mittelbarer Wechselwirkung mit der angreifenden Kraft und ihrem Angriffspunkte, sind daher von beiden abhängig.

In dem Augenblicke, worin die Last P auf den Träger zu wirken aufhört, hört auch der Spannungszustand auf, in welchen die Stäbe

durch die von der Kraft P erzeugten Längsschwingungen versetzt waren, und ihre kleinsten Teilchen kehren in ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück. Hierbei tritt in den zuvor gezogenen Stäben eine Annäherung ihrer kleinsten Teilchen und in den zuvor gedrückten Stäben

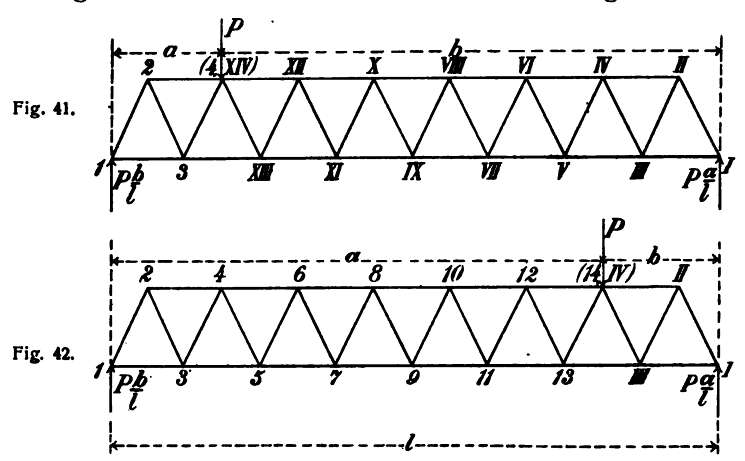


Fig. 41.

Fig. 42.

eine Entfernung ihrer kleinsten Teilchen ein. Bei vollkommener Elasticität aller dieser Stäbe entspricht jene Annäherung genau der früher durch Zug erzeugten Entfernung und jene Entfernung genau der früher durch Druck erzeugten Annäherung ihrer kleinsten Teilchen. Hieraus folgt, daß sich alle Stäbe nach Beseitigung der Last P wieder in dem früheren Zustande, also in dem Zustande des ursprünglichen Zusammenhanges ihrer kleinsten Teilchen befinden.

Wie sich die Übertragungswege bei Stabgefügen mit parallelen Gurten und gleichschenkeligen oder rechtwinkeligen Stabdreiecken gestalten, wenn die Kraft einmal links und einmal rechts von der Mitte des Stabgefüges angreift, zeigen die Fig. 41, 42 und 43, 44.

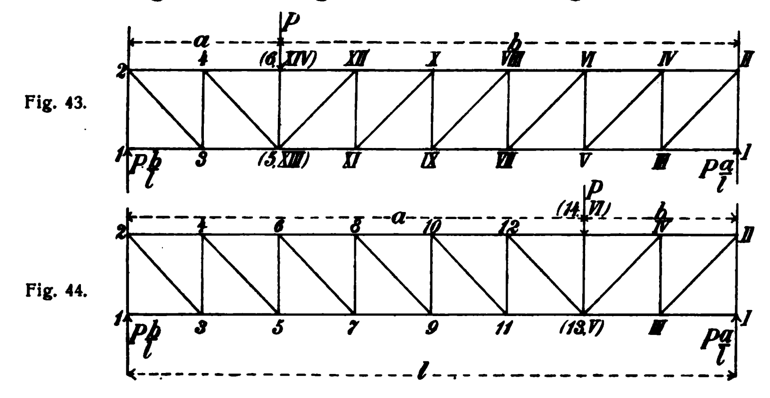


Fig. 43.

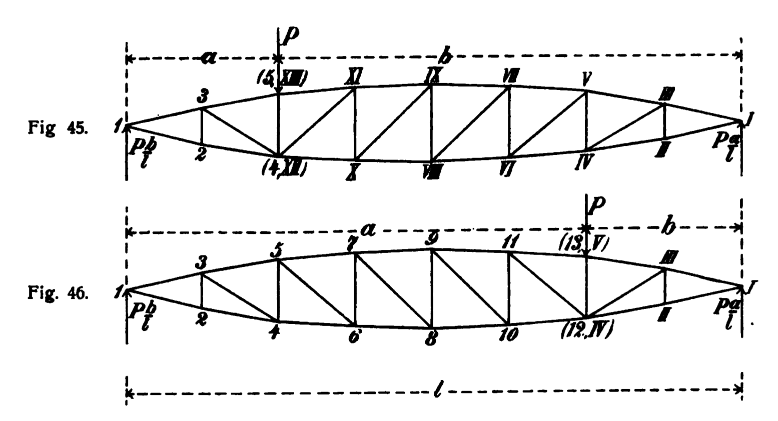
Fig. 44.

β) Stabgefüge mit gebogenen Gurten.

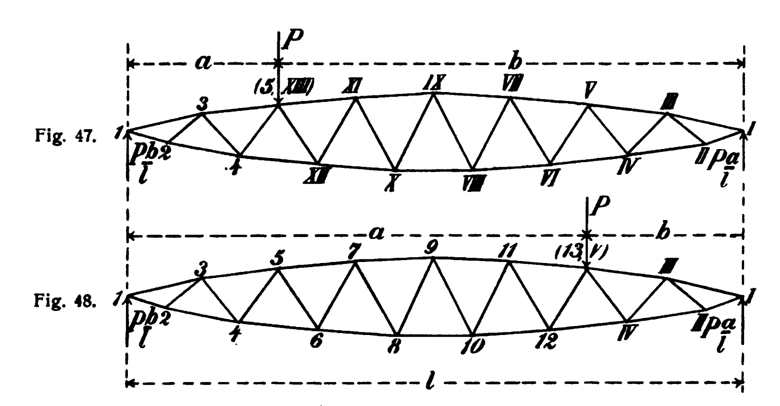
Die Untersuchung der Übertragungslinien der Schwingungen in dem massiven Balken hat schon zu einer Form geführt, welche derjenigen des sogenannten parabolischen Fisch- oder Linsenträgers entspricht. Wird diese Form für die Gurten eines Stabgefüges beibehalten und seine Gurten statt einer geschlossenen Wand durch ein aus Dreiecken zusammengesetztes Stabwerk verbunden, s. Fig. 45 bis 48, so vollzieht sich die Übertragung einer Last P durch die Stäbe von deren Angriffspunkt aus nach beiden Seiten über die aufeinanderfolgenden Festpunkte niederer Ordnung bis zu den Festpunkten e. O. Der Übertragungsweg führt also in Fig. 45 von dem Angriffspunkte (5 XIII) links über die Festpunkte n. O. 4 3 2 nach 1, rechts über XII bis II nach I und in Fig. 46 von dem Angriffspunkte (13 V) links über Festpunkte n. O. mit den aufeinanderfolgenden Zahlen 12 bis 2, rechts über IV III II nach I. Hieraus folgt, daß die Diagonalstäbe, wenn sie bei wechselnden Angriffspunkten der Last nur Zugspannungen übertragen sollen, gekreuzt werden müssen, während die Vertikalstäbe dann Druckspannungen erfahren. Die Übertragung der Last P durch die Gurten erfolgt gleichzeitig von deren Angriffspunkte aus nach beiden Seiten bis zu den Festpunkten e. *O.*, also in Fig. 45 von dem Angriffspunkte (5 XIII) aus im Obergurt links über den Festpunkt n. O. 3 direkt nach 1, rechts über die Festpunkte n. O. mit den ungeraden Nummern XI IX VII V III nach I, ferner von dem Angriffspunkte (4 XII) aus im Untergurt links über den Festpunkt n. O. 2 nach 1, über die Festpunkte n. O. mit den geraden Nummern X VIII VI IV II nach I. Ähnlich, nur umgekehrt, würde die Übertragung der Gurtspannungen in Fig. 46 erfolgen. Auf diesen Übertragungswegen werden die Obergurte gedrückt, die Untergurte gezogen und scheiden in den Festpunkten 1 und I je zwei gleiche entgegengesetzte Horizontalkräfte aus, welche sich vernichten und je zwei lotrecht abwärts wirkende Vertikalkräfte, deren linke und rechte bezw. der zu übertragenden Last $P\frac{b}{l}$ und $P\frac{a}{l}$ entspricht. Schließlich müssen letztere von den Gegendrücken der Auflager 1 und I aufgehoben werden, um das statische Gleichgewicht herzustellen.

Werden nur geneigte Stäbe zwischen die Gurten eingeschaltet, s. Fig. 47 u. 48, so ergeben sich die Reihen der aufeinanderfolgenden Festpunkte n. O., mithin auch Länge und Richtung der Übertragungswege ähnlich, also in Fig. 47 vom Angriffspunkt (5 XII) links über 4 3 2

nach 1, rechts über XII bis II nach I und in Fig. 48 vom Angriffspunkt (13 V) links über 12 bis 2 nach 1, rechts über IV III II nach I.



Auch hier erfahren die Stäbe abwechselnd Druck- und Zugspannungen, während die Ober- und Untergurten die bei der Übertragung durch die Stäbe ausgeschiedenen Druck- und Zugkräfte von den Angriffspunkten direkt auf die Stützpunkte 1 und I übertragen, wo



sich ihre gleichen aber entgegengesetzten wagrechten Seitenkräfte vernichten, ihre lotrechten Seitenkräfte addieren und durch den ihrer Summe gleichen, lotrecht aufwärtswirkenden Gegendruck aufgehoben werden müssen.

γ) Stabgefüge mit einem gebogenen und einem geraden Gurt.

Behält man für die Form des gebogenen Ober- oder Untergurtes die quadratische Parabel bei, s. Fig. 49 bis 52, so vollzieht sich die Übertragung einer Last P durch die Stäbe, von deren Angriffspunkte aus

nach beiden Seiten über die aufeinanderfolgenden Festpunkte n. O. 3,2 bezw. XI bis II bis zu den Festpunkten e. O. 1 und I. Der Übertragungsweg im Obergurt führt also bei gebogenem Ober- und geradem Untergurt in Fig. 49, von dem Angriffspunkte (4 XII) links über den Festpunkt n. O. 2 nach 1, rechts über die Festpunkte n. O. X bis II

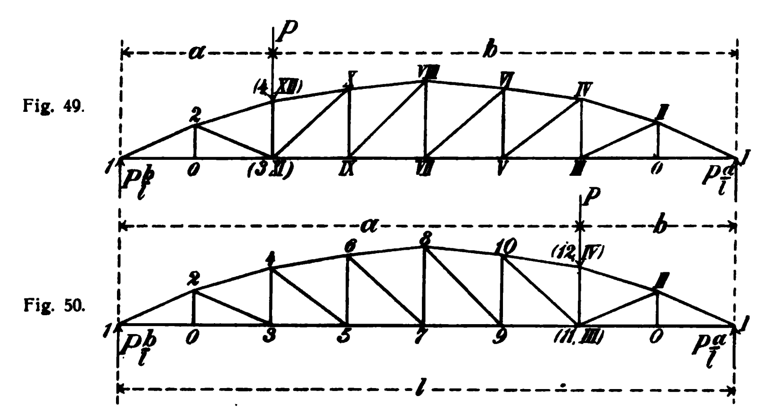


Fig. 49.

Fig. 50.

nach I; in Fig. 50 von dem Angriffspunkt (12 IV) links über die Festpunkte n. O. 10 bis 2 nach 1, rechts über den Festpunkt n. O. II nach I. Bemerkenswert ist hierbei, daß die je zwei in Fig. 49 und 50 mit *o* bezeichneten Punkte keine Festpunkte n. O. bilden, da hier eine

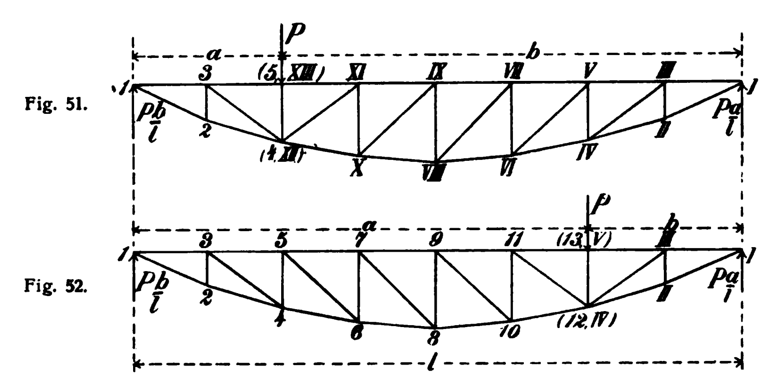


Fig. 51.

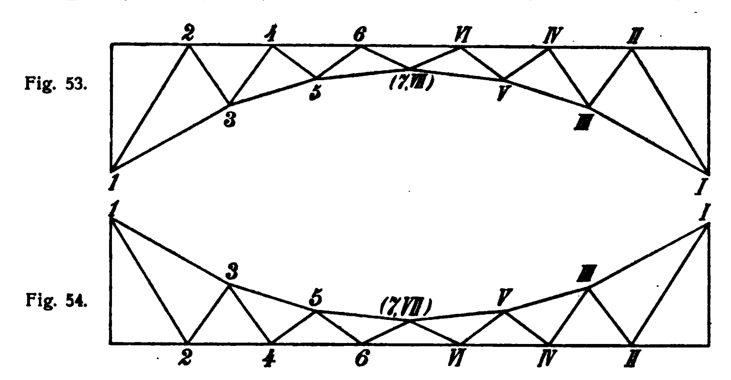
Fig. 52.

Kraftzerlegung, also auch eine Kraftübertragung nicht stattfinden kann. Die Übertragung der Kraft in den Untergurten findet in beiden Fällen in gerader Richtung zwischen 1 und I statt.

Bei geradem Ober- und gebogenem Untergurt, s. Fig. 51 und 52, führt der Übertragungsweg von dem Angriffspunkte (5 XIII) der Kraft *P* links über 3,2 nach 1, rechts über XII bis II nach I und in Fig. 52 von dem Angriffspunkte (13 V) links über 12 bis 2 nach 1, rechts

über III, II nach I. Die Übertragung der Kraft in den Untergurten findet in beiden Fällen wieder direkt zwischen 1 und I statt.

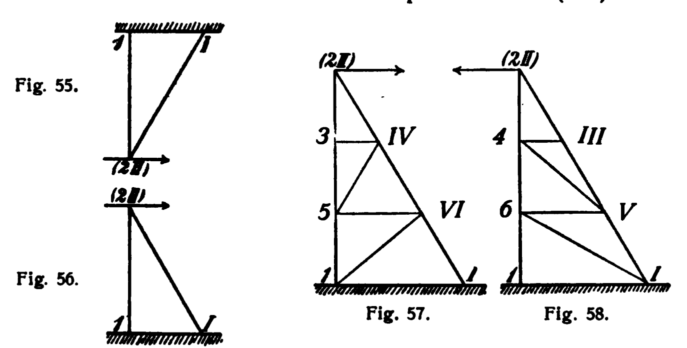
Ähnlich überträgt sich bei dem Bogen- und Hängträger eine in dem Angriffspunkt (7 VII) wirkende Kraft, s. Fig. 53 und 54, über die



Festpunkte n. O. 6 5 4 3 2, links nach dem Festpunkt e. O. 1 und über die Festpunkte n. O. VI V IV III II, rechts nach dem Festpunkte e. O. I.

δ) Lotrechte Stäbe und Stabgefüge.

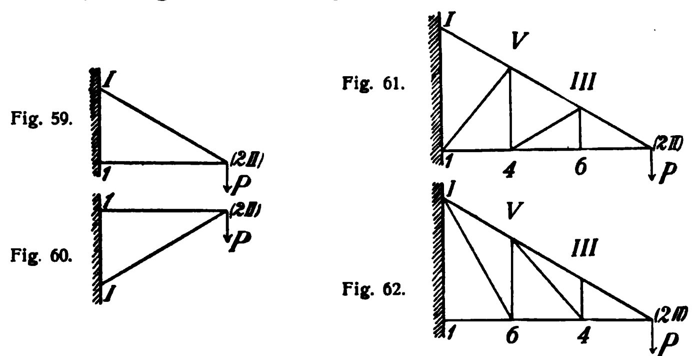
Soll ein lotrechter, um seinen oberen oder unteren Festpunkt e. O. 1 drehbarer Stab in der lotrechten Stellung erhalten werden, so kann dies durch Dreiecksverband, s. Fig. 55 und 56, geschehen, indem man einen zweiten Festpunkt e. O. I durch einen geneigten Stab mit dem lotrechten Stabe verbindet und dadurch den Festpunkt n. O. (2 II) schafft.



Um ein größeres Dreieck der Art durch Einschaltung kleinerer Dreiecke auszusteifen, kann dies durch Anordnung der Festpunkte n. O. 3 IV 5 VI, s. Fig. 57, oder III 4 V 6, s. Fig. 58, geschehen, je nachdem der Stab einer von links nach rechts oder einer von rechts nach links wirkenden äußeren Kraft zu widerstehen hat.

ε) Wagrechte Stäbe und Stabgefüge.

Soll ein wagrechter, um seinen Festpunkt e. O. 1 drehbarer Stab in der wagrechten Stellung erhalten werden, so kann dies durch Dreiecksverband, s. Fig. 59 und 60, geschehen, indem man einen zweiten



Festpunkt e. O. I durch einen geneigten Stab mit dem wagrechten Stabe verbindet und dadurch den Festpunkt n. O. (2 II) schafft.

Um ein solches Dreieck von größeren Maßen durch Einschaltung kleinerer Dreiecke auszusteifen, läßt sich das durch Anordnung der Festpunkte n. O. III 4 und V, s. Fig. 61, oder III 4 V 6, s. Fig. 62, erreichen, wobei das Stabgefüge durchweg lotrecht belastet ist.

ζ) Dreieckige Stabgefüge.

Soll ein Dreieck mit den Festpunkten e. O. 1 und I, s. Fig. 63 und 64, durch Einschaltung kleinerer Dreiecke ausgesteift werden, so werden durch Einschaltung der Festpunkte n. O. 2 II; (3 III) und (4 IV), s. Fig. 63, vier innere Stabdreiecke gebildet, bei welchen die Kräfte in 2 und II Längsschwingungen hervorrufen, welche sich bezw. nach 1 und (3 III) und nach I und 3 III, von (3 III) nach (4 IV) und von da über 2 und II bezw. nach den Festpunkten e. O. 1 und I fortpflanzen.

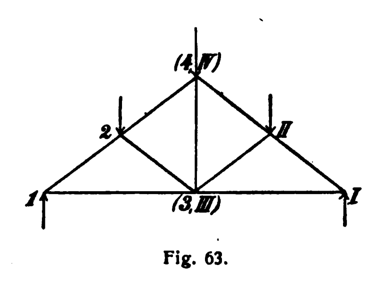


Fig. 63.

Hierbei haben die Stäbe 2 1 und II I je zwei Längsschwingungen fortzupflanzen. Die Zerlegungen dieser doppelten Längsschwingungen ergeben schließlich einfache Längsschwingungen in dem wagrechten Stabe 1 (3 III) I und lotrechte Schwingungen, welche durch entsprechende Gegendrücke in den Festpunkten e. O. 1 und I aufgehoben werden müssen.

Bei Einschaltung einer größeren Zahl von kleineren Stabdreiecken in ein größeres Stabdreieck läßt sich die Fortpflanzung der Stabspannungen in ähnlicher Weise verfolgen, wie es in Fig. 64 dargestellt ist.

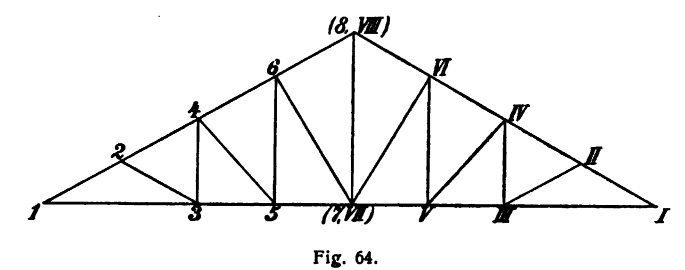


Fig. 64.

η) Inanspruchnahme der Stäbe in Stabgefügen.

Die Form und Richtung des Übertragungsweges läßt in allen Festpunkten erkennen, wo und in welcher Richtung die zu übertragende Kraft auf einen Stab einwirkt und auf das entgegensetzte Ende des Stabes als nächsten Festpunkt fortgepflanzt wird.

Wirkt jene Kraft nach dem letzteren Festpunkte hin, bewirkt also eine Annäherung der kleinsten Teilchen, so gerät der Stab in Druckspannung, wirkt sie von dem letzteren Festpunkte weg, bewirkt also eine Entfernung der kleinsten Teilchen, so gerät der Stab in Zugspannung. Bei gleichzeitiger Einwirkung von Querkräften auf die Stäbe setzen sich die Druckspannungen oder die Zugspannungen mit den aus Druck- und Zugspannungen bestehenden Biegungsspannungen zusammen.

b) Geschwindigkeit und Zeitdauer der Übertragung.

Die Geschwindigkeit der Übertragung entspricht der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung der kleinsten Stabteilchen. Bezeichnet L die Strecke, auf welche sich die Wellenbewegung innerhalb der Zeit t fortpflanzt, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit jener Wellenbewegung in der Sekunde

$$c = \frac{L}{t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

Diese Geschwindigkeit hängt nur von der Elasticität und Dichtigkeit des Stabstoffes ab, ist also von Form und Größe des Stabquerschnittes unabhängig. Bezeichnet man mit E den Elasticitätsmodul des Stabstoffes, mit Δ dessen Dichtigkeit, so ist

$$c = \sqrt{\frac{E}{\Delta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

woraus folgt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Stabe von gleichartiger Beschaffenheit, d. h. so lange der Quotient aus Elasticität und Dichtigkeit sich nicht ändert, überall dieselbe bleibt.

In der Gleichung 86 ist für den angewandten Stoff des Stabes der Elasticitätsmodul E in $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ und für $\Delta = \frac{s}{g}$ das specifische Gewicht s statt in $\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$, in $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$, die Sekundenbeschleunigung $g = 9{,}81$ m in Centimeter, also $g = 981$ einzuführen. Setzt man für

a) Schweißeisen $E = 2000000 = 2 \cdot 10^6$ kg, $s = \frac{7{,}8}{1000} = \frac{7{,}8}{10^3}$, so ist

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6}{\frac{7{,}8}{1000 \cdot 981}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9 \cdot 981}{7{,}8}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{10} \cdot 981}{78}} = 501990 \text{cm, also}$$

rund $5020 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$.

b) Flußeisen $E = 2150000 = 215 \cdot 10^4$ kg, $s = \frac{7{,}85}{1000} = \frac{7{,}85}{10^3}$, so ist

$$c = \sqrt{\frac{215 \cdot 10^4}{\frac{7{,}85}{1000 \cdot 981}}} = \sqrt{\frac{215 \cdot 10^7 \cdot 981}{7{,}85}} = \sqrt{\frac{215 \cdot 10^9 \cdot 981}{785}} = 518351 \text{ cm},$$

also rund $5200 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$.

c) Gußeisen (Druck) $E = 1050000 = 105 \cdot 10^4$ kg, $s = \frac{7{,}21}{1000} = \frac{7{,}21}{10^3}$, so ist

$$c = \sqrt{\frac{105 \cdot 10^4}{\frac{7{,}21}{1000 \cdot 981}}} = \sqrt{\frac{105 \cdot 10^7 \cdot 981}{7{,}21}} = \sqrt{\frac{105 \cdot 10^9 \cdot 981}{721}} = 377910 \text{ cm},$$

also rund $3800 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$.

d) Nadelholz $E = 95000 = 95 \cdot 10^3$ kg, $s = \frac{0{,}55}{1000} = \frac{0{,}55}{10^3}$, so ist

$$c = \sqrt{\frac{95 \cdot 10^3}{\frac{0{,}55}{1000 \cdot 981}}} = \sqrt{\frac{95 \cdot 10^6 \cdot 981}{0{,}55}} = \sqrt{\frac{95 \cdot 10^8 \cdot 981}{55}} = 411635 \text{ cm},$$

also rund $4100 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$.

e) Eichenholz $E = 108000 = 108 \cdot 10^3$ kg, $s = \frac{0{,}8}{1000} = \frac{0{,}8}{10^3}$, so ist

$$c = \sqrt{\frac{\frac{108 \cdot 10^3}{0{,}8}}{1000 \cdot 981}} = \sqrt{\frac{108 \cdot 10^6 \cdot 981}{0{,}8}} = \sqrt{\frac{108 \cdot 10^7 \cdot 981}{8}} = 363921 \text{ cm},$$

also rund $3640 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$.

f) Sandstein im Mittel $E = 60000 = 60 \cdot 10^3$ kg, $s = \frac{2{,}5}{1000} = \frac{2{,}5}{10^3}$, so ist

$$c = \sqrt{\frac{\frac{60 \cdot 10^3}{2{,}5}}{1000 \cdot 981}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 10^6 \cdot 981}{2{,}5}} = 153440 \text{ cm, also rund } 1535 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$$

g) Monierbeton im Mittel $E = 66000 = 66 \cdot 10^3$ kg, $s = \frac{2{,}5}{1000} = \frac{2{,}5}{10^3}$, so ist

$$c = \sqrt{\frac{\frac{66 \cdot 10^3}{2{,}5}}{1000 \cdot 981}} = \sqrt{\frac{66 \cdot 10^6 \cdot 981}{2{,}5}} = 160932 \text{ cm, also rund } 1610 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$$

h) Klinkermauerwerk im Mittel $E = 28000 = 28 \cdot 10^3$, $s = \frac{2}{1000} = \frac{2}{10^3}$,

so ist $c = \sqrt{\frac{\frac{28 \cdot 10^3}{2}}{1000 \cdot 981}} = \sqrt{\frac{28 \cdot 10^6 \cdot 981}{2}} = 117192$ cm, also rund $1172 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$.

Ist die zu durchlaufende Strecke L, wie gewöhnlich, gegeben, so erhält man aus Gleichung (85) die Zeit, innerhalb deren sie durchlaufen wird

$$t = \frac{L}{c} \quad \text{. . . . .} \quad (87)$$

in welche die den verschiedenen Baustoffen entsprechenden Werte von c einzuführen sind.

c) Übertragungswert der Stabgefüge.

α. Vergleich von Form und Richtung der Übertragung.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß bei den Stabgefügen mit geraden parallelen Gurten nur die Zwischenstäbe die Überträger einer zwischen den Stützen wirkenden Last auf diese Stützen sind, ihre Gurten dagegen die in den Festpunkten ausscheidenden Kräfte von ihren Enden nach ihrer Mitte leiten, um sich dort gegenseitig auf-

zuheben. Bei den Stabgefügen mit *gebogenen* Gurten dagegen bilden die Zwischenstäbe zwar auch die Überträger einer zwischen den Stützen wirkenden Last auf diese Stützen, aber ihre Gurten übernehmen ebenfalls einen Teil dieser Übertragung auf die Stützpunkte. Da nun der Übertragungswert der Stabgefüge zunächst von der Beteiligung seiner Stäbe an der Übertragung abhängt, so verdienen, von anderen Rücksichten abgesehen, die Stabgefüge mit gebogenen Gurten vor den Stabgefügen mit geraden parallelen Gurten den Vorzug.

Der Übertragungswert der Stabgefüge hängt ferner von der *Länge des Übertragungsweges* ab, welchen die zwischen den Stützen wirkenden Lasten bis zu diesen Stützen zurückzulegen haben. Da nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Stabschwingungen von der Elasticität und Dichtigkeit des angewandten Materiales abhängt und von dem Querschnitte der Stäbe unabhängig ist, so folgt, daß, abgesehen von anderen Rücksichten, diejenigen Stabgefüge den Vorzug verdienen, bei welchen jener Übertragungsweg der verhältnismäßig kleinere, also auch die *Zeitdauer der Übertragung* ihrer Lasten auf die Stützpunkte die geringere ist.

β. Länge der Übertragungswege und Zeitdauer der Übertragung.

αα. Rechnerischer Vergleich.

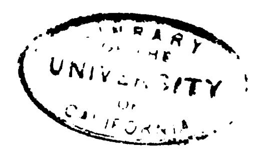
Vergleicht man zwei Träger mit $2n$ Feldern von der gleichen Weite λ und der gleichen Höhe h, worin der eine das Stabgefüge des gleichschenkeligen, der andere das Stabgefüge des rechtwinkeligen Dreieckes enthält, s. Fig. 65 und 66, so überträgt im ersteren Träger jeder der beiden geneigten Stäbe die Last seitlich um je $\frac{\lambda}{2}$, während im letzteren nur die Diagonale mit der Länge $d = \sqrt{h^2 + \lambda^2}$ die Last seitlich um λ überträgt, die zu dem rechtwinkeligen Dreieck gehörige Lotrechte aber die Last nicht seitlich, sondern nur in lotrechtem Sinne übertragen kann.

Fig. 65. Fig. 66.

Der Weg, welchen die Längsschwingungen in den Stäben des ersteren und letzteren Stabgefüges zu durchlaufen haben, ist bezw.

$$W_g = 2n\sqrt{h^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = n\sqrt{4h^2 + \lambda^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

und $$W_r = n\left(h + \sqrt{h^2 + \lambda^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$



also die Zeit, in welcher dieser Weg von der Mitte nach den beiden Stützpunkten 1 und I durchlaufen wird, wenn c die Geschwindigkeit oder den in einer Sekunde durchlaufenen Weg bezeichnet, bezw.:

$$Z_g = \frac{W_g}{c} = n\frac{\sqrt{(4h^2 + \lambda^2)}}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (90)$$

und

$$Z_r = \frac{W_r}{c} = \frac{n(h + \sqrt{h^2 + \lambda^2})}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (91)$$

Nimmt man z. B. $n = 20$, $h = 8$ m, $\lambda = 5$ m und für Schweisseisen $c = 5000 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$ an, so erhält man bezw. den Übertragungsweg:

$$W_g = 20\sqrt{4 \cdot 8^2 + 5^2} = 335{,}262 \text{ m}$$

und

$$W_r = 20(8 + \sqrt{8^2 + 5^2}) = 348{,}68 \text{ m}$$

ferner bezw. die Zeitdauer der Übertragung

$$Z_g = \frac{335{,}262}{5000} = 0{,}067 \text{ Sek.}$$

und

$$Z_r = \frac{348{,}68}{5000} = 0{,}0697 \text{ Sek.}$$

Der in dem Stabgefüge mit gleichschenkeligen Stabdreiecken zu durchlaufende Weg der Längsschwingungen ist also kürzer als bei dem Stabgefüge mit rechtwinkeligen Stabdreiecken und deshalb die zur Übertragung der Last erforderliche Zeitdauer in dem ersteren kleiner.

In ähnlicher Weise lassen sich auch bei anderen Stabgefügen die Längen der Übertragungswege und die Dauer der Übertragungszeiten rechnerisch bestimmen und miteinander vergleichen.

ββ. Zeichnerischer Vergleich.

Setzt man bei der Ermittelung der Länge der Übertragungswege die einzelnen kleineren, verschieden geneigten Übertragungsstrecken zu einer geraden Linie zusammen, so stellt diese den ganzen Übertragungsweg dar, dessen Länge in den einzelnen Stabgefügen verschieden ist. Für Stabgefüge verschiedener Anordnung, aber gleicher Stützweite und Höhe läßt sich dann der Übertragungsweg derselben unmittelbar vergleichen. So stellen die Linien Fig. 67 bis 73 bezw. die zu den Stabgefügen Fig. 42 und 43, 40 und 41, 45 und 46, 51 und 52, 49 und 50, 47 und 48, 53 und 54 gehörigen Längen ihrer

Fig. 73—76.

Übertragungswege dar, welche in dem Maßstabe von $\frac{1}{1000}$ der Längen für die gleichen Stützweiten von je 8 cm bezw. 20,8, 18,5, 15,0, 14,9, 14,2, 13,9 und 12,5 cm betragen.

Da die Übertragungsdauer den Längen, welche den ganzen Übertragungsweg darstellen, proportional ist, so läßt sich die größte Zeitdauer mittelst eines Zeitmaßstabes aus dem größten Übertragungswege bestimmen, welcher zwischen den Zeitpunkten durchlaufen wird, in welchen die Kraft zu wirken anfängt und aufhört, d. h. wo die angreifenden äußeren Kräfte durch die ihnen gleichen und entgegengesetzten äußeren Kräfte aufgehoben werden.

Die Zeitdauer der Übertragung für obige Übertragungswege ergibt sich aus deren Division durch die zugehörige Geschwindigkeit $c_1 = \frac{c^m \cdot 100}{1000}$ cm, d. h. durch den Übertragungsweg für den cm in der Sekunde. Für eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $c = 5000 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$, also $c_1 = \frac{5000 \cdot 100}{1000} = 500$ cm ergeben sich zum Zurücklegen der obigen Übertragungswege die Zeitdauern in Sekunden:

$$\frac{20,8}{500} = 0,041; \quad \frac{18,5}{500} = 0,037;$$

$$\frac{15}{500} = 0,03; \quad \frac{14,9}{500} = 0,029;$$

$$\frac{14,2}{500} = 0,028;\ \frac{13,9}{500} = 0,027;\ \frac{12,5}{500} = 0,025 \text{ Sek.}$$

12. Darstellung von Form und Richtung des Übertragungsweges durch Versuch.

Die für den vorliegenden Versuch angeordnete Vorrichtung, s. Taf. II, besteht in einem aus zwei durch ein Querstück *B* verbundenen Fußplatten *AA* bestehenden I-förmigen Fuße, welche ersteren zwei lotrechte Stützwände *C* aufnehmen. Diese Stützwände tragen den inneren mit Falz *i* versehenen rechteckigen Rahmen *DD*, in welchen die oben polierte, zur Aufnahme des zu prüfenden Stabgefüges bestimmte wagrechte Platte *E* eingelassen ist. An den Enden des hinteren Rahmenschenkels befinden sich zwei längs desselben verschiebliche Rollengehäuse *bb*, welche an den Stützpunkten 1 I mittelst der Klemmschrauben *cc* an dem Rahmenschenkel festgebremst werden können. Ein ähnliches verschiebliches und mittelst der Klemmschraube *f* festbremsbares Rollengehäuse *e* befindet sich an dem vorderen Rahmenschenkel, welches an einem beliebigen Angriffspunkte einer auf das Stabgefüge einwirkenden Kraft an dem Rahmenschenkel festgebremst werden kann. Über die in den Gehäusen *bb* befindlichen Rollen sind starke seidene Faden geführt, deren Enden bezw. mit den Stützpunkten 1 und I des zu prüfenden Stabgefüges verbunden sind und an ihren anderen Enden Wagschalen *dd* tragen, welche die den an beiden Festpunkten 1 I wirkenden Kräften entsprechenden Gewichte aufzunehmen haben. In ähnlicher Weise ist über die Rolle des Gehäuses *e* ein starker seidener Faden geführt, dessen eines Ende mit dem Angriffspunkte der Kraft (7, XI) verbunden wird und dessen anderes Ende die Wagschale *g* trägt, welche das der angreifenden Kraft entsprechende Gewicht aufzunehmen hat. Um die Platte *E* in die erforderliche genau wagrechte Lage bringen zu können, sind die vier Stellschrauben *a* des Fußgestelles so lange vor- oder rückwärts zu drehen, bis eine auf die Platte *E* gebrachte Dosenlibelle einspielt.

Das auf Form und Richtung des Übertragungsweges zu prüfende Stabgefüge ist aus einem elastischen Stoffe, welcher weder zu fest noch zu weich sein darf, um die Übertragung der inneren Schwingungen des Stabgefüges äußerlich erkennen zu lassen, am besten aus einem nicht zu starken Karton, herzustellen. Hierbei müssen die gedrückten Teile des Stabgefüges hinreichend steif und die gezogenen Teile des-

selben hinreichend biegsam sein, um die Fortpflanzung der Schwingungen von dem Angriffspunkte der äußeren Kraft aus bis zu den Festpunkten e. O. 1 und I an den plötzlichen, durch die äußere Kraft erzeugten Anspannungen der gezogenen Stäbe beobachten zu können.*)

Beträgt die Stützweite und Breite des auf den Versuchsboden *E* gebrachten Stabgefüges mit parallelen Gurten bezw. 74 und 13,8 cm, die Weite seiner acht Felder also je 9,25 cm, und wird in dem Angriffspunkte (7, XI), welcher $3 \cdot 9{,}25 = 27{,}75$ cm vom Festpunkt 1 und $5 \cdot 9{,}25 = 46{,}25$ cm vom Festpunkt I absteht, von der wagrechten Kraft 1000 g angegriffen, so überträgt sich nach links und rechts eine Teilkraft von bezw. $1000 \cdot \frac{46{,}25}{74} = 625$ g und $1000 \cdot \frac{27{,}75}{74} = 375$ g, welche an den Stützpunkten 1 und I mit den bezw. gleichen, aber entgegengesetzt wirkenden Kräften aufgehoben werden müssen. Bei der Übertragung erfährt der Stab (7 XI, 6 X) die Druckspannung — 1000 kg, die Querstäbe 54, 32 links und IX VIII, VII VI, V IV, III II rechts erfahren bezw. die gleiche Druckspannung — 625 g und — 375 g. Die Diagonalstäbe 65, 43, 21 links und X IX, VIII VII, VI V, IV III, II I rechts die gleiche Zugspannung $625 \frac{\sqrt{1{,}38^2 + 9{,}25^2}}{1{,}38} = 4236$ g und $375 \frac{\sqrt{1{,}38^2 + 9{,}25^2}}{1{,}38} = 2541$ g.

Werden die Abmessungen im Maßstabe von $\frac{8}{20}$ der wirklichen Größe aufgetragen, die Gewichte zu $\frac{1}{10}$ des wirklichen Wertes angenommen, so ergibt sich der auf Taf. II dargestellte Versuch, bei welchem die Übertragung der angreifenden Kraft über die Festpunkte niederer Ordnung bis zu den Festpunkten 1 und I an der Anspannung der Diagonalen zu erkennen ist. Die Prüfungsvorrichtung eignet sich ebenso gut für Prüfung desselben Stabgefüges mit anderen Angriffspunkten der zu übertragenden Kraft entweder mit derselben oder mit

*) In der Sammlung für Brückenbau an der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen befindet sich das aus Karton hergestellte Modell einer Fachwerkbrücke mit parallelen Gurten und zwei Windverbänden, wovon der obere aus Querstäben und gekreuzten Diagonalen hergestellt ist. Dieser Windverband hat eine Länge von 272 cm, 16 Felder von je 17 cm Weite und eine Breite von 24 cm, und läßt die zickzackförmige Übertragung des auf einen beliebigen vorderen oder hinteren Knoten ausgeübten Druckes auf die beiden an den Enden befindlichen Stützpunkte durch eine sofortige Anspannung der auf Zug beanspruchten Diagonalen deutlich erkennen.



entgegengesetzter Richtung als auch zur Prüfung beliebiger anderer Stabgefüge.

13. Zerlegung der Längsschwingungen in den Festpunkten der Stabgefüge.

α. Allgemeines.

Die Längsschwingungen können sich in Stabgefügen nur fortpflanzen, indem sie sich in den Festpunkten nach den Richtungen der daselbst zusammentreffenden beteiligten Stäbe zerlegen. Um die Größe der Längsschwingungen in den einzelnen Teilen eines Stabgefüges zu bestimmen, ist auf Grund der zuvor ermittelten Form und Richtung des Übertragungsweges die beiden entsprechende Zerlegung der Längsschwingungen in den aufeinanderfolgenden Festpunkten vorzunehmen und die aus dieser Zerlegung sich ergebenden inneren Kräfte einzeln mittelst eines geeigneten Kräftemaßstabes zu messen. Wo mehrere innere Kräfte in einem geraden Stabe nach einer Richtung wirken, sind sie streckenweise rechnerisch oder zeichnerisch zusammenzuzählen, um die zugehörigen Gesamtschwingungen zu erhalten.

Diese zeichnerische Zerlegung der Längsschwingungen oder der durch sie erzeugten Längsspannungen nebst der hierdurch bestimmten Größe der einzelnen Stabspannungen ergibt außer der Größe dieser Spannungen ein klares Bild des Übertragungsweges, der Übertragungsrichtung und der Art der Anspruchnahme der einzelnen Glieder des Stabgefüges. Sie hat also vor der gewöhnlichen zeichnerischen Berechnung von Stabgefügen, welche nur die Ermittlung von Größe und Art der Stabspannungen bezweckt, den Vorzug, zugleich den ganzen Vorgang im Inneren des Stabgefüges bezw. die Übertragung der Lasten auf ihre Stützpunkte erkennen zu lassen. Sie gibt also einen bemerkenswerten Fingerzeig für diejenige Statik der Baukonstruktionen, welche neben der Ermittelung von Größe und Art ihrer Spannungen zugleich eine Einsicht in die Übertragungsweise der Lasten auf die Stützpunkte erzielen will.

β. Stabgefüge mit geraden parallelen Gurten.

Nimmt man an, daß eine Kraft P in der Mitte eines symmetrischen Trapezträgers mit gleichschenkeligen Stabdreiecken, und zwar in dem Festpunkte n. O. (5 V), s. Fig. 74, angreift, so erfolgt die Zerlegung von P

nach 4 und IV links und rechts in zwei gleiche Seitenkräfte, von welchen die rechte und linke Seitenkraft sich nach und nach in den Festpunkten n. O. 4,3, 2 und IV, III, II in der in Fig. 74 angegebenen Weise zerlegt, während in den Festpunkten 1 und I die Zerlegung je in eine wagrechte und eine lotrechte Komponente stattfindet, wovon die erstere durch den Untergurt 1 I und die letztere durch den lotrechten Gegendruck

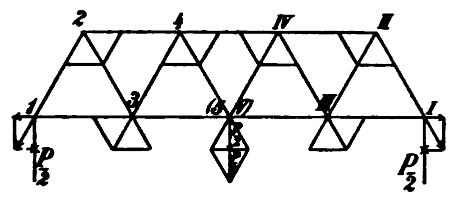


Fig. 74.

$\frac{P}{2}$ in 1 und I aufgehoben wird. Die Zugspannungen 5 4 und V IV, 3 2 und III II, sowie die Druckspannungen 4 3 und IV III, 2 1 und II I

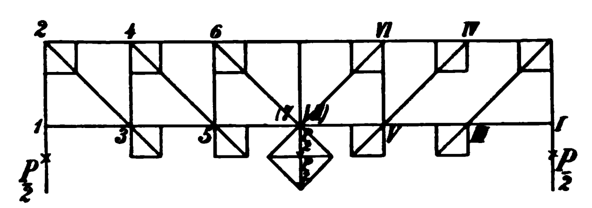


Fig. 75.

der Stäbe sind links und rechts die gleichen, während die Druck- und Zugspannungen des Ober- bezw. Untergurtes sich summieren, also von den Enden nach der Mitte hin von Feld zu Feld zunehmen. In ähnlicher Weise wird eine Kraft P in einem Rechteckträger mit rechtwinkeligen Stabdreiecken, s. Fig. 75, durch Zerlegung übertragen, wobei die Stabspannungen die gleichen bleiben und die Auflagerdrücke in 1 und I je $\frac{P}{2}$ betragen, während die Gurtspannungen von den Enden nach der Mitte hin zunehmen. Wird in den beiden Endfeldern des Rechteckträgers der Zugstab durch einen entgegengesetzt geneigten Stab ersetzt, so erfolgt die Zerlegung in der durch Fig. 76 dargestellten Weise, woraus folgt, daß dieser Stab die zahlenmäßig gleiche Druckspannung erfährt.

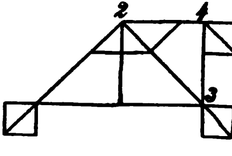


Fig. 76.

Aus den Zerlegungen der Stabspannungen in den einzelnen Festpunkten n. O. folgt, daß die zwischen den Gurten befindlichen Stabreihen die eigentlichen Überträger der Lasten von den einzelnen Festpunkten n. O. auf die Festpunkte e. O., 1 und I bilden, während die Gurten

die Sammler der in den oberen und in den unteren Festpunkten n. O. ausgeschiedenen Horizontalkräfte sind, wodurch sich die Zunahme der Gurtspannungen von den Enden nach der Mitte der Träger hin erklärt.

Die von den äußeren Kräften in den oberen und unteren Festpunkten der Stabverbindungen bei der Zerlegung der Längsschwingungen erzeugten Druckspannungen im Obergurt und Zugspannungen im Untergurt pflanzen sich beide von den Enden nach der Mitte hin fort, begegnen sich dort und heben sich daselbst auf. In dem Inneren des äußerlich scheinbar im Ruhezustande befindlichen Stabgefüges entwickelt sich also ein Zusammenspiel von Längsschwingungen, welche mit größter Geschwindigkeit in den Stäben von den Angriffspunkten im Zickzackweg nach den Festpunkten erster Ordnung, in den Gurten in gerader, aber entgegengesetzter Richtung nach jenem Angriffspunkte der Kraft P zueilen und hierdurch die Stäbe und Gurten in die entsprechenden Druck- und Zugspannungen versetzen. Hiernach bilden die äußeren Kräfte die Ursache der **Längsschwingungen** in Stäben und Gurten, die Längsschwingungen die Ursache der in Stäben und Gurten entstehenden **Längsspannungen.**

Wirken mehrere äußere Kräfte auf die Stabgefüge ein, so wiederholen sich diese Erscheinungen und erzeugen in denselben ein Zusammenspiel von ebensovielen Längsschwingungen, als äußere Kräfte auf sie einwirken. Mit der Vermehrung der Längsschwingungen werden auch die von ihnen erzeugten Spannungen in Stäben und Gurten vermehrt, wodurch eine Vergrößerung der zu ihrer Aufnahme erforderlichen Querschnitte bedingt wird.

14. Vergleich rechnerisch und zeichnerisch ermittelter Spannungen in Stabgefügen.

Taf. III.

Legt man ein einfaches rechteckiges Stabgefüge von $l = 60$ m Länge, $h = 10$ m Höhe mit $n = 6$ gleichen Feldern von $\lambda = 10$ m Weite und Länge der Diagonalen $d = 14,14$ m, ferner eine Eigenlast $e = 2000$ kg, Nutzlast $v = 6000$ kg, also $e + v = 8000$ kg für je einen unteren Knoten zu Grunde, so lassen sich die Spannungen der einzelnen Teile auf rechnerischem und zeichnerischem Wege ermitteln.

a) Rechnerische Ermittelung.

Im Obergurt ergibt sich für das m[te] Feld die Spannung

$$S_o = -\frac{(e+v)}{2} \cdot \frac{\lambda}{h} \cdot m(n-m) = -\frac{8000}{2} \cdot \frac{10}{10} m(6-m) =$$

$-4000\, m(6-m)$, also zwischen Festpunkt

2 und 4 $= -4000 \cdot 1 \cdot 5 = -20000$ kg
4 und 6 $= -4000 \cdot 2 \cdot 4 = -32000$ kg
6 und 8 $= -4000 \cdot 3 \cdot 3 = -36000$ kg.

Im Untergurt ergibt sich die Spannung

$$S_u = \frac{(e+v)}{2} \cdot \frac{\lambda}{h} (m-1)(n-m+1) = \frac{8000}{2} \cdot \frac{10}{10} (m-1)(7-m)$$

$= 4000\,(m-1)(7-m)$, also zwischen Festpunkt

1 und 3 $= 4000 \cdot 0 \cdot 6 = 0$ kg
3 und 5 $= 4000 \cdot 1 \cdot 5 = 20000$ kg
5 und 7 $= 4000 \cdot 2 \cdot 4 = 32000$ kg.

In den Diagonalen findet man die Spannung

$$S_d = \frac{e+v}{2n} \cdot \frac{d}{h} [-m(m-1) + (n-m)(n-m+1)] = \frac{8000}{2{,}6} \cdot \frac{14{,}14}{10}$$

$[-m(m-1) + (6-m)(7-m)]$, also zwischen Festpunkt

2 und 3 $= 942{,}7\,[-1 \cdot 0 + 5 \cdot 6] = 28284$ kg
4 und 5 $= 942{,}7\,[-2 \cdot 1 + 4 \cdot 5] = 16970$ kg
6 und 7 $= 942{,}7\,[-3 \cdot 2 + 3 \cdot 4] = 5657$ kg.

In den Vertikalen findet man die Spannung

$$S_v = \frac{e+v}{2n} [m(m+1) - (n-m-1)(n-m)] = \frac{8000}{2{,}6} [m(m+1)$$

$-(5-m)(6-m)]$, also zwischen Festpunkt

1 und 2 $= 666{,}6\,[0 \cdot 1 - 5 \cdot 6] = -20000$ kg
3 und 4 $= 666{,}6\,[1 \cdot 2 - 4 \cdot 5] = -12000$ kg
5 und 6 $= 666{,}6\,[2 \cdot 3 - 3 \cdot 4] = -4000$ kg,

während die Vertikale 78 die Spannung null annimmt.

Die Zusammenstellung der rechnerisch ermittelten Spannungen enthält Fig. 4.

b) Zeichnerische Ermittelung.

α. Zeichnerisch-statische Ermittelung.

Trägt man die in den Festpunkten n. O. (7 VII), 5 und 3 wirkenden Lasten von bezw. 4000, 8000 und 8000 kg in dem Kräftemaßstab

1 mm = 800 kg lotrecht untereinander auf, so stellt deren Summe von 20000 kg in dem Kräfteplane zugleich die Druckspannung des Vertikalstabes 12 dar. Zieht man durch dessen oberen und unteren Endpunkt Parallele bezw. zu den Stäben 2 4 und 2 3 bis zu ihrem Schnittpunkt, so ergibt das hierdurch entstandene geschlossene Dreieck bezw. die Druckspannung von 20000 kg im Obergurtstück 2 4 und die Zugspannung von 28300 kg in der Diagonale 2 3. Setzt man die in dem Festpunkte n. O. 4 wirkende Last von 8000 + 4000 = 12000 kg, welche zugleich die Druckspannung in dem Vertikalstabe 4 3 darstellt, mit den Richtungen der Stäbe 4 6 und 4 5 zusammen, so ergibt das hierdurch entstandene geschlossene Dreieck die Druckspannung von 12000 kg in dem Obergurtstück 4 6 und die Zugspannung von 16960 kg in der Diagonale 4 5. Setzt man endlich die in dem Festpunkte n. O. 6 wirkende Last von 8000 kg, welche zugleich die Druckspannung in der Vertikale 6 5 darstellt, mit den Richtungen der Stäbe 6 8 und 6 7 zusammen, so erhält man aus dem hierdurch gebildeten geschlossenen Dreieck die Druckspannung von 4000 kg im Obergurtstück und die Zugspannung von 5656,8 kg in der Diagonale 6 7. Aus den geschlossenen Rechtecken des hierdurch entstandenen Kräfteplanes ergeben sich schließlich die Zugspannungen von 20000 und 32000 kg der Untergurtstäbe 3 5 und 5 7. Die Zusammenstellung der zeichnerisch-statisch ermittelten Spannungen enthält Fig. 2. Auf diese Weise sind zwar die Spannungen aller Stäbe in dem Stabgefüge zahlenmäßig bestimmt, aber aus dem Kräfteplan geht nicht hervor, wie die ermittelten Spannnngen der einzelnen Stäbe durch die Übertragung der Lasten auf die Spützpunkte e. O. infolge der durch diese Lasten in jenen Stäben erzeugten Schwingungen entstanden sind.

β) Zeichnerisch-dynamische Ermittelung.

Die Übertragung der in den Festpunkten n. O. 7 5 3 links und VII V III rechts wirkenden Lasten von bezw. je 4000, 8000 und 8000 kg erfolgt links über die Festpunkte n. O. 7 6 5 4 3 und 2 zum Festpunkte e. O. 1, rechts über die Festpunkte n. O. VII VI V IV III II zum Festpunkt e. O. I. Die Zerlegung in den so aufeinanderfolgenden Festpunkten ersieht sich aus Fig. 1, worin die Spannungen in den Stäben 7 6, 6 5, 5 4, 4 3, 3 2, 2 1 links und in den Stäben VII VI, VI V, V IV, VI III, III II, II I rechts sich unmittelbar ergeben. Sie nehmen also von der Mitte nach den Enden hin zu, während die Spannungen der Gurten in den einzelnen Feldern sich in der angegebenen Weise summieren, und zwar von den Enden nach der Mitte hin, also in umgekehrtem Sinne wie die Spannungen in den Stäben zunehmen. Hierbei

werden also die Spannungen nicht nur der Größe nach, sondern auch nach ihrer Art, je nachdem es Druckspannungen (—) oder Zugspannungen (+) sind, bestimmt. Demnach stellen die Spannungen der Diagonalen 7 6, 5 4, 3 2 links und VII VI, V IV, III II rechts Zugspannungen, die Spannungen der Vertikalen 6 5, 4 3, 2 1 links und VI V, IV III, II I rechts Druckspannungen, die Spannungen in den Obergurtstäben 6 8, 4 6, 2 4 links und VI VIII, IV VI, II IV rechts Druckspannungen, die Spannungen in den Untergurtstäben 7 5, 5 3, 3 1 links und VII V, V III, III I rechts Zugspannungen dar.

Stellt man die zeichnerisch-statisch und dynamisch ermittelten Spannungen der Stäbe zusammen, so erhält man den Vergleich beider in Fig. 3, während in Fig. 4 alle rechnerisch und zeichnerisch ermittelten Spannungen übersichtlich zusammengestellt sind.

15. Stabgefüge unter Einwirkung von Längs- und Querkräften.

Wird ein Stabgefüge mit parallelen Gurten, der Spannweite l und Höhe h in der Mitte mit einer Last P beschwert, s. Fig. 77, und diese

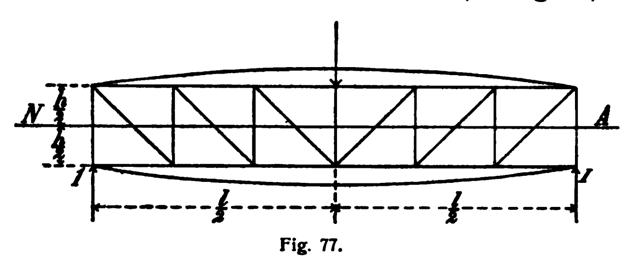


Fig. 77.

Last je zur Hälfte auf den Obergurt und auf den Untergurt verteilt, so wird eine Last von je $\frac{P}{4}$ auf die Stützpunkte 1 und I übertragen. Setzt man das Angriffsmoment dieser Last dem Widerstandsmomente gleich, so ergibt sich für den oberhalb und unterhalb der neutralen Schichte befindlichen Teil des Stabgefüges bezw.

$$(92)\quad \frac{P}{4} \cdot \frac{x\,(l-x)}{l} - H_x^d \cdot \frac{h}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{P}{4} \cdot \frac{x\,(l-x)}{l} - H_x^z \cdot \frac{h}{2} = 0 \quad (93)$$

Wird hierin $H_x^d = F_x^d \cdot d = y_x^d \cdot b \cdot d$ und $H_x^z = F_x^z \cdot z = y_x^z \cdot b \cdot z$ gesetzt, worin F_x^d und F_x^z bezw. den Querschnitt des Druck- und Zuggurtes mit der Breite b, mit der Dicke y_x^d und y_x^z, mit der Druck- und Zugfestigkeit d und z bezeichnet, so ergibt sich bezw.

$$(94)\quad \frac{P}{4}\cdot\frac{x(l-x)}{l}-y_x^d\cdot b\cdot d\cdot\frac{h}{2}=0 \text{ und } \frac{P}{4}\cdot\frac{x(l-x)}{l}-y_x^z\cdot b\cdot z\cdot\frac{h}{2}=0\quad (95)$$

Für $x=\frac{l}{2}$ und $y_{1/2}^d$ bezw. $y_{1/2}^z$ erhält man:

$$(96)\quad \frac{P}{4}\cdot\frac{l}{4}-y_{1/2}^d\cdot b\cdot d\cdot\frac{h}{2}=0 \text{ und } \frac{P}{4}\cdot\frac{l}{4}-y_{1/2}^z\cdot b\cdot z\cdot\frac{h}{2}=0\quad (97)$$

Werden die zueinander gehörigen Gleichungen 94, 96 und 95, 97 dividiert, so ergeben sich die Gleichungen der zugehörigen quadratischen Parabeln

$$(98)\ \ldots\ y_x^d=\frac{x(l-x)}{(l/2)^2}y_{1/2}^d \text{ und } y_x^z=\frac{x(l-x)}{(l/2)^2}y_{1/2}^z\ \ldots\ (99)$$

Werden diese Gleichungen nach x differentiiert, so ergibt sich

$$\frac{dy_x^d}{dx}=y_{1/2}^d\frac{l-2x}{(l/2)^2}=\operatorname{tang}\alpha^d\quad\ldots\quad(100)$$

$$\text{und }\frac{dy_x^z}{dx}=y_{1/2}^z\frac{l-2x}{(l/2)^2}=\operatorname{tang}\alpha^z\quad\ldots\quad(101)$$

Setzt man in beiden Gleichungen $x=\frac{l}{2}$, so ist $\operatorname{tang}\alpha^d=\operatorname{tang}\alpha^z=0$, für $x=0$, also über den Festpunkten e. O. 1 und I, erhält man bezw.

$$(102)\ \ldots\ \operatorname{tang}\alpha_o^d=\frac{2y_{1/2}^d}{l/2} \text{ und } \operatorname{tang}\alpha_o^z=\frac{2y_{1/2}^z}{l/2}\ \ldots\ (103)$$

Aus Gleichung 96 und 97 ergibt sich bezw. $y_{1/2}^d=\frac{1}{8}\frac{Pl}{bdh}=\frac{2}{3}a_d$ und $y_{1/2}^z=\frac{1}{8}\frac{Pl}{bzh}=\frac{2}{3}a_z$, also $\operatorname{tang}\alpha^d=2\cdot\frac{\frac{2}{3}a_d}{l/2}$ und $\operatorname{tang}\alpha^z=2\cdot\frac{\frac{2}{3}a_z}{l/2}$, woraus sich der quadratisch-parabolische Verlauf der Spannungen in den beiden Gurten ergibt.

Ist die Belastung g des Stabgefüges eine gleichförmig und stetig verteilte, so ändert sich die Form der Gleichungen 96 und 97 nicht, nur ist darin

$$(104)\ .\ y_{1/2}^d=\frac{1}{8}\cdot\frac{g}{d}\cdot\frac{l^2}{bh}=\frac{2}{3}a_d \text{ und } y_{1/2}^z=\frac{1}{8}\cdot\frac{g}{z}\cdot\frac{l^2}{bh}=\frac{2}{3}a_z\ .\ (105)$$

zu setzen.

Die Übertragung der Querkräfte in den parallelen Gurten von Stabgefügen auf die Festpunkte erfolgt also gleichfalls auf quadratisch-parabolischem Wege, jedoch sind die Höhen a^d und a^z der Gurte den Höhen h ihrer Stabgefüge umgekehrt proportional.

Wirken auf einzelne Stäbe eines Stabgefüges außer den äußeren, in den Festpunkten n. O. angreifenden Längskräften zwischen je zwei solchen Festpunkten *m* und *n* Querkräfte senkrecht auf die Längsachse des von ersteren begrenzten Stabes *n m*, so entstehen in dem Stabe außer seinen Längsspannungen, Biegungsspannungen, welche in dem über und unter seiner neutralen Schichte befindlichen Querschnittsteile bezw. Druck- und Zugspannungen sind. Diese Spannungen sind die Folgen von Längsschwingungen, welche von dem unter dem Angriffspunkte der Kraft befindlichen Querschnitte ausgehen und zu den in dem Stabe bereits entwickelten Längsschwingungen hinzutreten. Beide Längsschwingungen erzeugen Spannungen, welche, wo sie gleichartig sind, sich vergrößern, wo sie ungleichartig sind, sich vermindern. So tritt in einem zugleich auf Biegung beanspruchten Obergurtstück in den über und unter seiner neutralen Schichte befindlichen Querschnittsteilen bezw. Druckspannung zu Druckspannung und Druckspannung zu Zugspannung. In einem zugleich auf Biegung beanspruchten Untergurtstück tritt in den über und unter seiner neutralen Schichte befindlichen Querschnittsteilen bezw. Zugspannung zu Druckspannung und Zugspannung zu Druckspannung. Diese zusammengesetzten Spannungen erfordern Stabquerschnitte, in welchen ihre algebraischen Summen nicht über die Festigkeit des Stabstoffes hinausgehen dürfen.

Wie sich die Stabschwingungen bei der Zerlegung an den Festpunkten verhalten und ob bezw. welche Verzögerungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Stabschwingungen sich ergeben, entzieht sich zur Zeit noch der Kenntnis, bildet also eine Aufgabe künftiger Ermittelungen. Für die Bestimmung der Gurt- und Stabstärken genügt indes die Ermittelung ihrer Längs- und ihrer zusammengesetzten Spannungen auf rechnerischem und zeichnerischem Wege.

16. Beziehungen zwischen den Angriffs- und Stützpunkten von Stäben und Stabgefügen.

Aus der Übertragung von Längskräften, Querkräften oder von beiden zugleich durch Stäbe oder Stabgefüge auf ihre festen Stützpunkte geht hervor, daß zwischen den in den Angriffspunkten und den Stützpunkten wirkenden Kräften in Stäben oder Stabgefügen Beziehungen bestehen, welche sich erstrecken auf

1) die Herstellung des Gleichgewichtes durch Aufhebung der angreifenden Kräfte von widerstehenden Kräften,

2) den Weg, welchen die durch die äußeren Kräfte hervorgerufenen Stabschwingungen von den Angriffspunkten jener Kräfte bis zu den zugehörigen Stützpunkten zu durchlaufen haben.

Zu 1a. Wirkt am Ende eines am anderen Ende befestigten lotrechten Stabes eine zur Stabachse parallele Zugkraft Z oder Druckkraft $-D$, s. Fig. 1 u. 2, so muß diese Kraft an dem einzigen Festpunkte des Stabes bezw. durch die Gegenkraft $-Z$ und $+D$ aufgehoben werden.

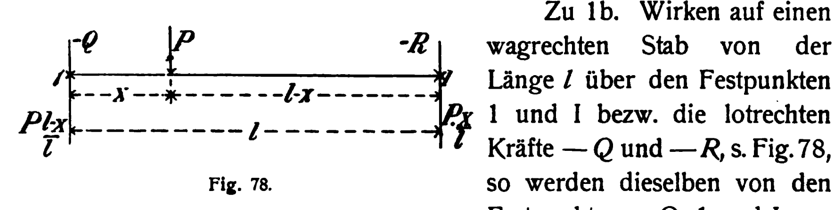


Fig. 78.

Zu 1b. Wirken auf einen wagrechten Stab von der Länge l über den Festpunkten 1 und I bezw. die lotrechten Kräfte $-Q$ und $-R$, s. Fig. 78, so werden dieselben von den Festpunkten e. O. 1 und I unmittelbar aufgenommen, während die im Abstande x von 1 wirkende freie Last P bezw. die Gegendrücke $P\,\frac{l-x}{l}$ und $P\frac{x}{l}$ hervorruft.

Der gesammte Gegendruck in 1 und I ist also bezw. $Q + P\,\frac{(l-x)}{l}$ und $R + P\,\frac{x}{l}$ und besteht aus dem Gegendruck der örtlich wirkenden und der übertragenen Last. Der erstere und letztere bildet bezw. den passiven und aktiven Auflagerdruck. Hierbei muß die äußere Kraft P in den beiden Stützpunkten 1 und I durch zwei Gegenkräfte aufgenommen werden, welche zusammengenommen ihr gleich und entgegengesetzt sind.

Zu 2a. In dem unter 1a angeführten Falle ist der Weg, auf welchem die Übertragung erfolgt, ein g e r a d e r. In dem unter 1b angeführten Falle sind die Wege der von dem Angriffspunkte der Kraft P nach den Festpunkten 1 und I zu übertragenden Teilkräfte $P\frac{l-x}{l}$ und $P\,\frac{x}{l}$ q u a d r a t i s c h - p a r a b o l i s c h e. In dem unter dem Angriffspunkte der Kraft befindlichen Querschnitte des Stabes werden durch die Kraft P über- bezw. unterhalb seiner neutralen Achse die Kräfte H_d und H_z mit den Hebelsarmen $\frac{2}{3} a_d$ und $\frac{2}{3} a_z$ erzeugt, s. Fig. 78a, welche ein Kräftepaar bilden, dessen Widerstandsmoment das Angriffsmoment der äußeren Kräfte aufheben muß. Hiernach ist

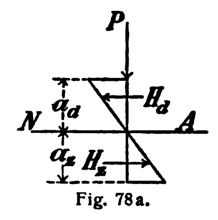


Fig. 78a.

$$P \frac{(l-x)}{l} x = H_d \cdot \tfrac{2}{3} a_d + H_z \cdot \tfrac{2}{3} a_z = P \frac{x}{l} (l-x) \,. \quad \mathbf{(105a)}$$

Die hierdurch sich erzeugenden quadratisch-parabolischen Übertragungswege treffen über den Stützpunkten 1 und I zusammen, wo sich auch die inneren Kräfte H_d und H_z aufheben. Hierdurch ist außer dem Gleichgewichte der äußeren auch das Gleichgewicht der inneren Kräfte hergestellt.

In Stäben, welche gleichzeitig durch Längs- und Querkräfte angegriffen werden, vollzieht sich das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte auf ähnliche Weise.

Zu 2b. In Stabgefügen aus zusammengestellten Stabdreiecken, deren Gurte gerade und wagrecht und deren Stäbe entweder alle geneigt oder abwechselnd lotrecht und geneigt sind, erfolgt die Übertragung der freien Kräfte durch die Stäbe auf zickzackförmigem Wege, während die Gurten die bei der Zerlegung ausscheidenden Horizontalkräfte aufnehmen und auf geradem Wege von den Enden des Stabgefüges nach dessen Mitte hin fortpflanzen. Die Stäbe bilden also hier die eigentlichen Überträger der Lasten auf die Stützpunkte, während die Gurten nur zur völligen oder teilweisen Aufhebung der ausgeschiedenen Horizontalkräfte dienen.

17. Querschnitte der Stäbe bei Einwirkung verschiedener Kräfte.

a) Allgemeines.

Die mittelst Zerlegung bewirkte Fortpflanzung der Stabspannungen von einem Festpunkte höherer zu einem Festpunkte niederer Ordnung erfordert Stäbe von hinreichender, der Festigkeit des Stabstoffes entsprechender Stärke. Diese Stärke ergibt sich aus dem Querschnitte des Stabes nach Flächeninhalt und Querschnittsform. Die Stabspannung wird bewirkt durch Längskräfte, welche einen Zug oder welche einen Druck, durch Querkräfte, welche eine Biegung und durch Schrägkräfte, welche gleichzeitig eine Längsspannung und eine Biegungsspannung erzeugen.

b) Längskräfte.

α. Zugkräfte.

Erfährt der Stab eine Zugspannung Z bei einer zulässigen Festigkeit z seines Stoffes, so ist der erforderliche Flächeninhalt seines Querschnittes

$$F_z = \frac{Z}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (106)$$

Damit der Zug sich gleichförmig über die ganze Querschnittsfläche verteilt, ist die geeignetste Form die kreisförmige, s. Fig. 79, 80, oder kreisringförmige, worin die kleinsten Teilchen am gleichmäßigsten um den Schwerpunkt C des kreisförmigen Querschnittes mit dem Radius r oder des Kreisringes mit den Radien R und r verteilt sind. Der Kreisform am

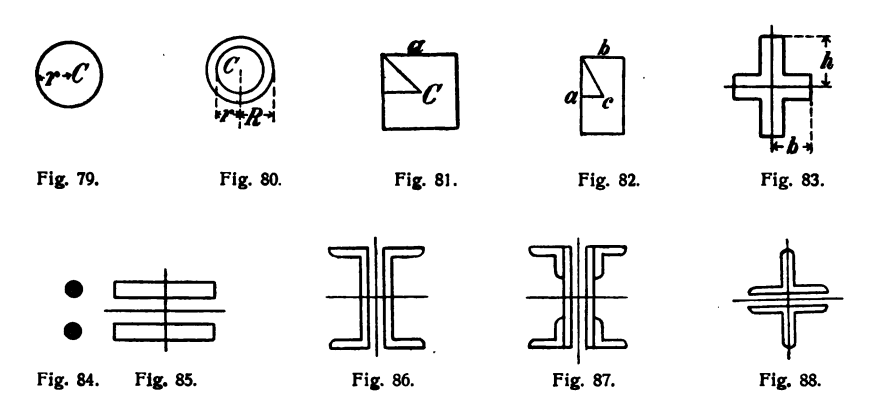


Fig. 79. Fig. 80. Fig. 81. Fig. 82. Fig. 83.

Fig. 84. Fig. 85. Fig. 86. Fig. 87. Fig. 88.

nächsten kommen die Querschnitte mit der Form regelmäßiger Vielecke, z. B. des Achtecks und Sechsecks. Eine nur annähernd zweckmäßige Form ist das Viereck, insbesondere das Quadrat, s. Fig. 81, mit den kleinsten und größten Abständen $\frac{a}{2}$ und $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, das Rechteck, s. Fig. 82, mit den kleinsten und größten Abständen $\frac{b}{2}$ und $\frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ von dem Schwerpunkte C, sowie der aus fünf Rechtecken gebildete kreuzförmige Querschnitt, s. Fig. 83, mit den Abständen b und h von dem Schwerpunkte.

Sollen die Stäbe größeren Zugspannungen widerstehen und nicht allzu große Abmessungen erhalten, so können ihre Querschnitte doppelt angewandt werden, also an die Stelle einteiliger Stäbe zweiteilige Stäbe treten, s. Fig. 84 bis 88, welche je zwei runde, je zwei rechteckige, je zwei einfache oder zusammengesetzte [-förmige oder zusammengesetzte T-förmige Querschnitte darstellen.

β. Druckkräfte.

Erfährt der Stab durch die Längskraft P eine Druckspannung $D = P$, so hängt es von dem Verhältnis seiner kleinsten Querschnitts-

abmessung h zu seiner Länge l ab, ob derselbe gerade bleibt oder seitlich ausbiegt. Im ersten Fall ist bei einer zulässigen Festigkeit d seines Stoffes der erforderliche Querschnitt

$$F_d = \frac{D}{d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

im zweiten Falle besteht die Gleichung

$$D = Nm\frac{Et}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

wobei N den Sicherheitsgrad, m einen von der Befestigung des Stabes an seinen Enden abhängigen Wert, E den Elasticitätsmodul des angewandten Stabstoffes, t das Trägheitsmoment des Querschnittes und l die Länge des Stabes bedeutet.

Soll D in beiden Fällen gleich, es also gleichgültig sein, den Querschnitt des Stabes auf Druck oder auf seitliche Ausbiegung (Knicken) zu berechnen, so wird

$$F_d\, d = Nm\frac{Et}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

oder, wenn hierin $t = cF_d h^2$ gesetzt wird, worin h die kleinste Abmessung des Querschnittes bedeutet,

$$d = NmEc\left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

und hieraus

$$\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{d}{NmEc}} = A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (111)$$

Für $\frac{h}{l} \lessgtr A$ ist also der Stabquerschnitt bezw. nach Gleichung (107) auf Druck und nach Gleichung (108) auf seitliche Ausbiegung (Knicken) zu berechnen. Diese Grenze von $\frac{h}{l}$ ist für Stäbe und Stützen nach Stoff und Querschnittsform verschieden. Da der Wert d mit der Abnahme von $\frac{h}{l}$ diesem Verhältnis entsprechend abnimmt, so läßt sich der Querschnitt des Stabes auch nach Gleichung (1) auf Druck berechnen, wenn nur der entsprechende Wert von d eingesetzt wird. Die mit dem Verhältnis $\frac{h}{l}$ abnehmenden Werte von d enthält für verschiedene Stäbe die nachstehende Tabelle.

Druckgleichwerte *d* auf Ausbiegung (Knicken) beanspruchter Stäbe oder Stützen mit abnehmendem Verhältnis $\frac{h}{l}$ ihrer kleinsten Querschnittsmaße zu ihrer Länge in $\frac{kg}{cm^2}$.

$\frac{h}{l}$	Schweisseisen			$\frac{h}{l}$	Gußeisen			$\frac{h}{l}$	Holz		
	□	○	+		□	○	+		□	○	+
0,126	—	—	670	0,315	—	—	1600	0,217	—	--	75
0,120	—	—	603	0,300	—	—	1443	0,201	—	75	64
0,117	—	670	574	0,292	—	1600	1368	0,174	75	56	48
0,110	—	590	517	0,275	—	1413	1213	0,150	55	42	36
0,101	670	498	430	0,253	1600	1195	1028	0,125	38	29	25
0,090	527	345	340	0,225	1257	944	813	0,100	25	18	16
0,080	417	312	269	0,200	944	747	642	0,090	20	15	13
0,070	318	239	206	0,175	751	573	490	0,080	16	12	10
0,060	234	176	151	0,150	559	421	362	0,070	12	9	8
0,050	162	122	105	0,125	388	291	251	0,060	9	7	6
0,040	104	78	67	0,100	248	187	160	0,050	6	5	4
0,030	59	44	38	0,075	164	123	106	0,040	4	3	3
0,020	26	20	17	0,050	62	46	40	0,030	2	2	2
0,010	6	5	4	0,025	15	12	6	0,020	1	1	1

Die vorstehenden Werte *d* sind, um zu der drehbaren Befestigung beider Stabenden, sowie zu der Festhaltung beider Stabenden überzugehen, mit bezw. 4 und 16 zu multiplicieren. Für zwischenliegende Werte $\frac{h}{l}$ ist zu interpolieren.

Für die nur auf Druck beanspruchten Stäbe eignen sich vorzugsweise kreisförmige oder kreisringförmige Querschnitte, s. Fig. 89 und 90, in welchen die Stoffteilchen am gleichmäßigsten um den Schwerpunkt *C* des kreisförmigen Querschnittes mit dem Radius *r* bezw. mit den

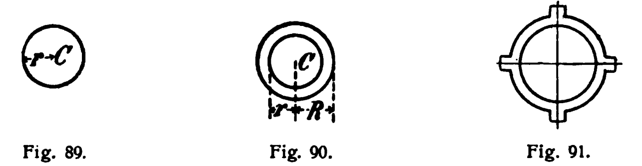
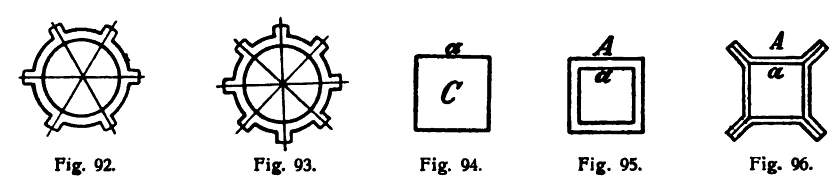


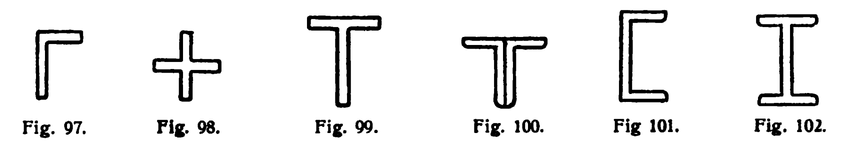
Fig. 89. Fig. 90. Fig. 91.

Radien *R* und *r* gelagert sind. Der Kreisringform am nächsten stehen die hohlen, aus je vier, je sechs oder je acht Kreissegmenten zusammen-

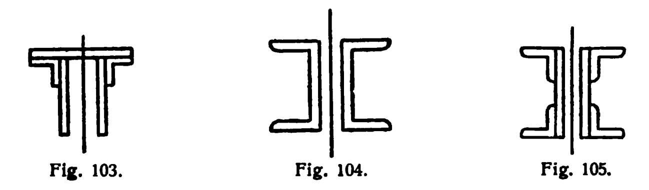
gesetzten Querschnitte, s. Fig. 91, 92 und 93. Eine nur annähernd zweckmäßige Form bildet das Viereck, insbesondere das volle und hohle Quadrat, s. Fig. 94, 95, 96, mit den kleinsten und größten Abständen $\frac{a}{2}$ und $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ bezw. $\frac{A}{2}$ und $\frac{A}{2}\sqrt{2}$. Bei den auf seitliche Ausbiegung (Knicken) beanspruchten Stäben handelt es sich um eine Entwickelung des


Fig. 92. Fig. 93. Fig. 94. Fig. 95. Fig. 96.

Querschnittes nach zwei zueinander rechtwinkeligen Richtungen, in welchen die Abmessungen möglichst groß und unter sich gleich sind, s. Fig. 97


Fig. 97. Fig. 98. Fig. 99. Fig. 100. Fig 101. Fig. 102.

bis 102. Werden größere Querschnitte erforderlich, so treten an die Stelle der einteiligen zweiteilige Querschnitte, s. Fig. 103, 104, 105.


Fig. 103. Fig. 104. Fig. 105.

c) Querkräfte.

Erfährt ein wagrechter Stab von der Länge l in seiner Mitte durch eine zu seiner Achse senkrechte Einzelkraft P eine Biegung, s. Fig. 106, so besteht die Gleichung

$$P\frac{l}{4} = \frac{z}{a_z}t = \frac{d}{a_d}t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (112)$$

worin z und d bezw. die größte zulässige Zug- und Druckspannung, a_z und a^d bezw. den Abstand der gezogensten und gedrücktesten Faser von der neutralen Schichte und t das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes darstellen. Hieraus ergibt sich bezw.

Fig. 106.

die in dem Stabquerschnitt entwickelte größte Zugspannung und größte Druckspannung

$$(113) \quad . \; . \; . \quad z = \frac{l}{4} \cdot \frac{a_z}{t} \cdot P \text{ und } d = \frac{l}{4} \cdot \frac{a_d}{t} \cdot P \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (114)$$

Würde die Belastung eine über den ganzen Stab gleichförmig verteilte Last p sein, so würde in Gleichung (113) $\frac{pl^2}{8}$ statt $P\frac{l}{4}$ zu setzen sein, mithin bezw.

$$(115) \quad . \; . \; . \quad z = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{a_z}{t} \cdot p \text{ und } d = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{a_d}{t} \cdot p \quad . \; . \; . \quad (116)$$

Sind die zulässigen Spannungen z und d einander gleich, wie bei Flußeisen und Stahl, so wird der Stabstoff am besten ausgenützt, wenn die Querschnitte ober- und unterhalb ihrer neutralen Schichte symmetrisch

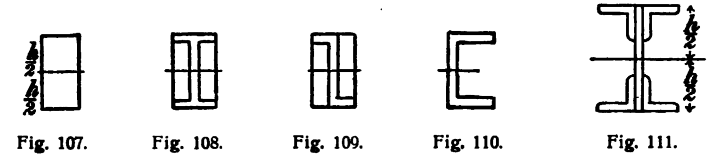


Fig. 107. Fig. 108. Fig. 109. Fig. 110. Fig. 111.

sind, wenn also ihre neutrale Schichte den Querschnitt halbiert, s. Fig. 107 bis 113. Bildet das Rechteck von der Breite b und Höhe h mit der

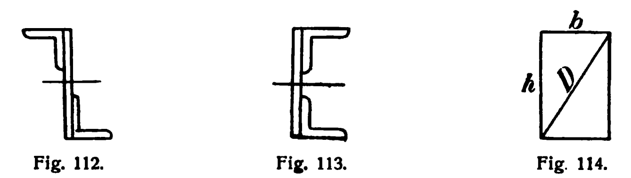


Fig. 112. Fig. 113. Fig. 114.

Diagonale D, s. Fig. 114, die Grundform, so ist das auf seine neutrale Schichte bezogene Trägheitsmoment $t = \frac{bh^3}{12}$ und, wegen $a_z = a_d = \frac{h}{2}$, das Biegungsmoment $\frac{t}{a_z} = \frac{bh^2}{6}$. Um den Widerstand des Stabes bei gleichem Kubikinhalte oder Gewichte desselben gegen Durchbiegung möglichst zu erhöhen, ist daher dessen Höhe bei angemessenem Verhältnis zu b möglichst zu vergrößern. Zu diesem Zwecke muß bh^2 ein Maximum werden. Setzt man $h^2 = D^2 - b^2$, so wird

$$\frac{d(bh^2)}{db} = D^2 - 3b^2 = 0 \text{ und } \frac{d^2(bh)^2}{db^2} = -6b,$$

woraus $b = \frac{D}{\sqrt{3}}$ und $h = D\sqrt{\frac{2}{3}}$ gefunden wird. Hiernach ergibt sich

das größte Biegungsmoment des rechteckigen Stabes, wenn das Seitenverhältnis seines Querschnittes $\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ beträgt.

d) Längs- und Querkräfte.

α. Zug- und Querkräfte.

Wird ein Stab 1 I gleichzeitig durch eine Längskraft Z auf Zug und durch eine Querkraft P auf Biegung angegriffen, s. Fig. 115, so erfährt er zunächst die Zugspannung $z_1 = \frac{Z}{F_z}$, welche sich über seinen Querschnitt F_z gleichförmig verteilt und ferner die Biegungsspannungen $z_{,,} = \frac{l}{4} \cdot \frac{a_z}{t} \cdot P$

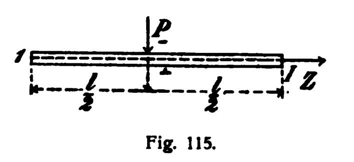


Fig. 115.

unterhalb und $d = \frac{l}{4} \cdot \frac{a_z}{t} \cdot P$ oberhalb seiner neutralen Schichte. Die größte Gesamtspannung des Stabes beträgt mithin unterhalb seiner neutralen Schichte $z_{,} + z_{,,}$ und oberhalb seiner neutralen Schichte $z_{,} - d$. Die größte gesamte Zugspannung darf die zulässige Zugspannung z nicht überschreiten, mithin muß

$$z_{,} + z_{,,} \leqq z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (117)$$

sein, während $z_{,} - d$ die kleinere Zugspannung darstellt.

Wird der Stab 1 I gleichzeitig durch die Längskraft Z auf Zug und durch eine gleichförmig über ihn verteilte Last p angegriffen, so ist in Gleichung (117) nur $z_{,,} = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{a_z}{t} \cdot p$ zu setzen.

β. Druck- und Querkräfte.

Wird ein Stab 1 I gleichzeitig durch eine Längskraft D auf Druck und durch eine Querkraft P auf Biegung angegriffen, s. Fig. 116, so erfährt er zunächst die Druckspannung $d_{,} = \frac{D}{F_d}$, welche sich gleichförmig über seinen Querschnitt F_d verteilt, und ferner die Biegungsspannungen $d_{,,} = \frac{l}{4} \cdot \frac{a_d}{t} \cdot P$

Fig. 116.

oberhalb und $z = \frac{l}{4} \cdot \frac{a_z}{t} \cdot P$ unterhalb seiner neutralen Schichte. Die größte Gesamtspannung beträgt mithin oberhalb seiner neutralen Schichte

$d_, + d_{,,}$ und unterhalb seiner neutralen Schichte $d_, - z$. Die größte gesamte Druckspannung darf die zulässige Druckspannung d nicht überschreiten, mithin muß

$$d_, + d_{,,} \leq d \quad \ldots \ldots \ldots \quad (118)$$

sein, während $d_, - z$ die kleinere Druckspannung darstellt.

Wird der Stab 1 I gleichzeitig durch die Längskraft D auf Druck und durch eine gleichförmig über ihn verteilte Last p angegriffen, so ist in Gleichung (118) nur $d_{,,} = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{a_d}{t} \cdot p$ zu setzen.

18. Einwirkung stoßweise wirkender Kräfte auf Stäbe und Stabgefüge.

a) Allgemeines.

Hängt man ein Gewicht P an einen oben befestigten Stab, s. Fig. 117, so wird das Gewicht von dem Stabe so lange getragen werden, als die von dem Gewicht erzeugten Verlängerungen die zulässige Entfernung der kleinsten Teilchen, also deren gegenseitige Anziehungskraft nicht überschreiten. Dasselbe Gewicht P zerreißt den Stab, sobald es so plötzlich auf ihn einwirkt, daß die Zeit, deren der Stab zu seiner Verlängerung, bezw. dem Entfernen seiner kleinsten Teilchen voneinander bedarf, nicht erreicht ist. Der Stab konnte daher eine ruhende Last tragen, während er von der gleichen, aber in Bewegung gesetzten Last durch Anstrengung seiner kleinsten Teile über die Elasticitätsgrenze seines Stoffes hinaus zerrissen wird.

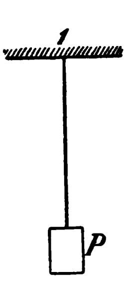


Fig. 117.

Was hier von einem Zugstabe gesagt ist, gilt in umgekehrtem Sinne auch für einen Druckstab.

Werden also Zug- und Druckstäbe in Baugefügen, welche angemessene Lasten im Ruhezustande übertragen können, von den gleichen, aber bewegten Lasten so beansprucht, daß sie zur Übertragung derselben nicht genügend Zeit haben, so erfolgt durch plötzliche Überanstrengung der Anziehungs- oder Abstoßungskräfte ihrer kleinsten Teilchen deren Zerstörung.

Da nun Baugefüge, wie Brückenträger, zeitweise durch mehr oder minder bewegte Lasten beansprucht werden, so erscheint es notwendig, Brücken von Verkehrslasten ohne nachteilige Stoßwirkungen überschreiten zu lassen. Dieser Notwendigkeit wird unter anderem dadurch

entsprochen, daß Militärabteilungen auf Brücken sich nicht im Schritt oder im Trabe bewegen dürfen, daß Eisenbahnzüge die Brücken mit ermäßigter Geschwindigkeit befahren sollen, oder daß Brückenproben unter anderem nicht dadurch vorgenommen werden, daß man durch auf- und abspringende Menschen die Brücke in Schwingungen versetzt, um sie auf die Elasticität ihrer Träger zu prüfen. Derartige Mißgriffe laufen auf eine Mißhandlung des Baustoffes hinaus und sind geeignet, eine unbeabsichtigte Zerstörung desselben herbeizuführen.

Um nun unvermeidliche Erschütterungen eines Baugefüges unschädlich zu machen, erscheint es nötig, die Querschnitte seiner einzelnen Teile derart zu vergrößern, daß die in ihnen enthaltenen kleinsten Teilchen zahlreicher sind, also den in ihnen unter dem Einfluß äußerer Kräfte entwickelten Schwingungen einen vermehrten Zug- oder Druckwiderstand entgegensetzen können. Da nun die Größe eines Querschnittes gezogener und gedrückter Stäbe bezw.

(119) . . . . . $F_z = \frac{Z}{z}$ und $F_d = \frac{D}{d}$ . . . . . . **(120)**

ist, so entspricht man dieser Querschnittsvermehrung durch Verminderung der zulässigen Zug- und Druckspannungen z und d.

b) Schwingungsfestigkeit der Baustoffe.

Die zulässigen Spannungen der in Schwingungen versetzten Baugefüge hängen von deren Baustoffen ab und können für Eisen, Holz und Stein in $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, wie folgt, angenommen werden.

	Geringe Erschütterungen		Bedeutende Erschütterungen		An der Elasticitätsgrenze	
	z	*d*	*z*	*d*	*z*	*d*
Schweißeisen .	1340	1340	670	670	1600	1600
Flußeisen . .	1200	1200	1000	1000	2200	2200
Stahl . . .	2680	2680	1340	1340	3000	3000
Gußeisen . .	400	1600	—	—	650	1950
Eichenholz .	80	66,7	—	—	260	217
Nadelholz . .	99,5	74,6	—	—	250	187,5
Sandstein . .	—	—	—	—	875	700
Granit . . .	—	—	—	—	100	800

Die Festigkeit des vielfachen Schwingungen ausgesetzten Eisens oder seine Schwingungsfestigkeit wird mit Bezug auf die Wöhler'schen Versuche wie folgt berechnet.

Für Stäbe, welche nur auf Zug oder nur auf Druck beansprucht werden, setzt Launhardt bei

$$\text{Schweißeisen } z = d = 800\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{S\min}{S\max}\right) \quad . \; . \quad (121)$$

$$\text{Gußstahl } z = d = 1200\left(1 + \tfrac{3}{4}\frac{S\min}{S\max}\right) \quad . \; . \; . \quad (122)$$

worin $S\max$ und $S\min$ bezw. die größte und die kleinste Spannung des Stabes bezeichnet.

Für Stäbe, welche abwechselnd auf Zug und Druck beansprucht werden, setzt Weyrauch bei

$$\text{Schweißeisen } z = d = 700\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{S\min}{S\max}\right) \quad . \; . \quad (123)$$

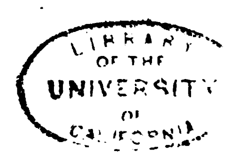
$$\text{Stahl } z = d = 1100\left(1 - \tfrac{5}{11}\frac{S\min}{S\max}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (124)$$

worin $S\max$ und $S\min$ die zahlenmäßig größte und kleinste Spannung des Stabes bezeichnet, gleichviel, ob es Druck- oder Zugspannungen sind.

19. Anordnung der Stabgefüge in den Festpunkten.

Die Zerlegung der Stabspannungen in den einzelnen Festpunkten e. O. und n. O. erfordert daselbst eine Verbindung der Stäbe, welche nach 4b und 4c eine gelenkartige sein muß, wenn die Stäbe der einzelnen Dreiecke bei ihren, durch beliebig geneigte Kräfte veranlaßten Längen- und Lageänderungen sich ungehindert drehen sollen. Von praktischen Bedenken abgesehen, erscheint also bei Eisenkonstruktionen die Anwendung je eines Verbindungsbolzens für alle in einem Festpunkte zusammenstoßenden Trägerteile theoretisch geboten. Die praktische Erfahrung, daß solche einzelne Bolzen durch die auf sie einwirkenden Scheerkräfte und Lochdrücke bei Erschütterungen bezw. angegriffen und gelockert werden, hat einer Verbindung jener Teile durch mehrere Nietbolzen den Vorzug gegeben. Diese verschiedene Befestigung der Stabenden ist nicht gleichgültig für die Fortpflanzung der Schwingungsbewegung in dem Stabe. Während bei an den Enden freien und festeingespannten Stäben die Verteilung der Schwingungsbewegung eine verschiedenartige ist, so bleibt doch für einen Stab von der Länge l die Schwingungsdauer $T = \frac{2l}{nc}$ und für $n = 1$ die Dauer der langsamsten Schwingungen

$$T = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\Delta}{E}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (125)$$



Die Zahl der während einer Sekunde in dem Stabe erzeugten Schwingungen ist daher

$$N = \frac{1}{T} = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\Delta}} \quad \ldots \ldots \quad (126)$$

also in beiden Fällen dieselbe. Die Schwingungsdauer T des Stabes ist mithin gleich der doppelten Länge des Stabes, dividiert durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung im Stabe, ist also unabhängig von der Größe und Form seines Querschnittes und wird nur bedingt durch die Stablänge, durch die Elasticität und die Dichtigkeit des Stabstoffes. Die Schwingungszahl N ist daher gleich dem Quotienten der doppelten Länge des Stabes in die Fortpflanzungsgeschwindigkeit seines Stoffes. Da nun diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{E}{\Delta}}$ nur von dem Elasticitätsmodul und der Dichtigkeit des Stabstoffes abhängt, so ist sie von dessen Befestigungsweise, also davon, ob die Stäbe an ihren Enden drehbar oder fest angeschlossen sind, unabhängig.

Ein Stabgefüge, dessen Stäbe in einer der zuvor angegebenen Arten verbunden sind, bildet eine Kette von Stabdreiecken mit mindestens zwei Festpunkten e. O. und einer größeren oder kleineren Zahl von Festpunkten n. O., deren Glieder je nach der Form und der Größe ihrer Querschnitte durch geeignete Verbindungsmittel zu einem möglichst unverschieblichen Ganzen vereinigt sind.

Bei den früher betrachteten Stabgefügen mit geraden oder gebrochenen Gurten und mit gleichschenkeligen oder rechtwinkeligen Stabdreiecken handelt es sich um die Verbindung ihrer beiden Gurten mit den zwischen sie eingeschalteten Stäben bei Rücksicht auf ihre zuvor nach Inhalt und Form bestimmten Querschnitte. Der Querschnitt eines solchen Stabgefüges nimmt zwei verschiedene Formen an, je nachdem seine Gurten ein-, zwei- oder mehrteilige Querschnitte besitzen.

a) Stabgefüge mit einteiligen Gurtquerschnitten. Reihenfolge ihrer Glieder.

An einteilige Gurtquerschnitte können entweder zweiteilige Stäbe, s. Fig. 118, oder einteilige Stäbe mittelst je zweier Verbindungsplatten (Laschen), s. Fig. 120, angeschlossen werden.

Im ersteren Falle ergibt sich die beigefügte Zahlenreihe I II I, in dem letzteren Falle die beigefügte Zahlenreihe I II I II I für die Zahl der aufeinanderfolgenden Teile des Querschnittes.

Aus den Ansichten 119 und 121 ergeben sich diese Verbindungen wie folgt.

Im ersten Falle werden die zweiteiligen lotrechten und die zweiteiligen geneigten Stäbe übereinander auf beiden Seiten des einteiligen Gurtes befestigt.

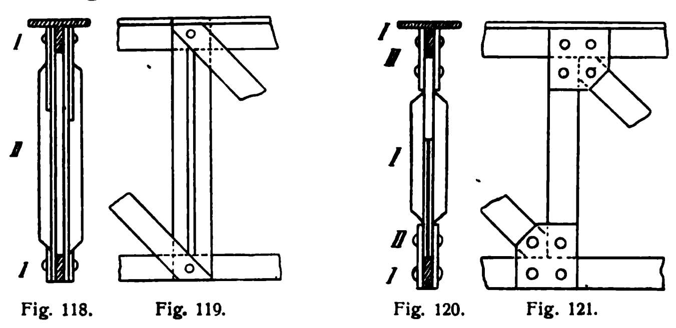


Fig. 118. Fig. 119. Fig. 120. Fig. 121.

Im zweiten Falle werden die einteiligen lotrechten und geneigten Stäbe mittelst je zweier Verbindungsbleche (Knotenbleche) von einer für deren Befestigung hinreichenden Größe an die einteiligen Gurten angeschlossen.

b) Stabgefüge mit zweiteiligen Gurtquerschnitten. Reihenfolge ihrer Glieder.

An zweiteilige Gurtquerschnitte können entweder einteilige Stäbe, s. Fig. 122, oder zweiteilige Stäbe mittelst je einer Verbindungsplatte (Lasche), s. Fig. 124, oder einteilige Stäbe mittelst je einer größeren Verbindungsplatte und je zwei kleineren Verbindungsplatten (Laschen), s. Fig. 126, angeschlossen werden. Die Zahlenreihen, welche sich für

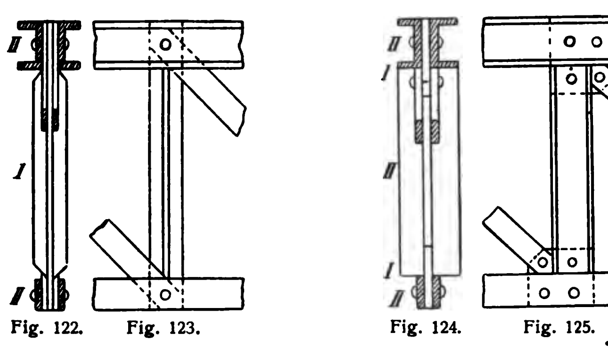


Fig. 122. Fig. 123. Fig. 124. Fig. 125.

die Zahlen der aufeinanderfolgenden Teile des Trägerquerschnittes ergeben, sind im ersten Falle, s. Fig. 122, II I II, im zweiten Falle, s. Fig. 124, II I II I II, im dritten Falle, s. Fig. 126, II I II I II I II. In den Ansichten, s. Fig. 123, 125, 127, gestalten sich diese Verbindungen wie folgt.

Im ersten Falle werden die einteiligen lotrechten Druckstäbe direkt und die einteiligen geneigten Zugstäbe mittelst je zweier Laschen von mindestens dem halben Querschnitte der zugehörigen Zugstäbe zwischen die zweiteiligen Gurte eingeschaltet und dort an sie angeschlossen.

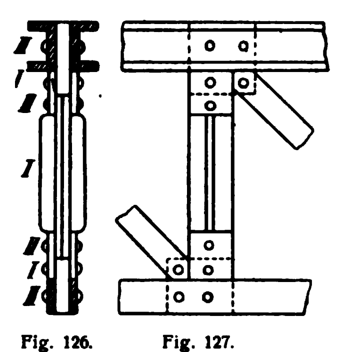


Fig. 126. Fig. 127.

Im zweiten Falle erhalten die Verbindungsbleche (Knotenbleche) die zur Befestigung der zweiteiligen Stäbe erforderliche Größe.

Im dritten Falle erhalten sowohl die größeren Verbindungsbleche (Knotenbleche) als auch die kleineren Verbindungsbleche (Laschen) die erforderliche Größe zur Befestigung der einteiligen Stäbe.

20. Befestigung der Stabgefügeteile in den Festpunkten.

Die Befestigung der Trägerteile erfolgt bei Eisenkonstruktionen durch Bolzen oder Niete und hängt ab von den durch die Längsschwingungen der Stäbe erzeugten Stabspannungen, von der Scheerfestigkeit der Befestigungsmittel und von dem Widerstande des Stabstoffes.

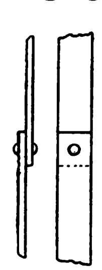


Fig. 128 u. 129.

Soll ein Stab von der Zugspannung Z, der zulässigen Zugfestigkeit z und dem Querschnitt F_z mit einem zweiten Stabe von derselben Zugspannung und Zugfestigkeit durch einen Schrauben- oder Nietbolzen von dem Durchmesser d_σ und der Scheerfestigkeit σ verbunden werden, s. Fig. 128 und 129, so ergibt sich entweder aus der Gleichung $\pi \frac{d_\sigma^2}{4} \sigma = Z$, worin $Z = zF_z = z\beta\delta$ zu setzen ist, der Durchmesser des Bolzens

$$d_\sigma = \sqrt{\frac{4}{\pi}\,\frac{z}{\sigma} F_z} = 1{,}13\sqrt{\frac{z}{\sigma}\beta\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

oder, wenn k den zulässigen Druck auf die Innenfläche des Bolzenloches und δ die Stabdicke bezeichnet, aus der Gleichung $d_k \delta k = Z$, wenn für Z der obige Wert und darin bei der Stabbreite β $F_z = \beta\delta$ gesetzt wird, der Bolzendurchmesser

$$d_k = \frac{Z}{k\delta} = \frac{z}{k}\,\frac{F_z}{\delta} = \frac{z}{k}\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

von welchen beiden Werten d_σ und d_k stets der größere zu wählen ist. Werden statt eines Bolzens deren n erfordert, so ergibt sich aus vorstehenden Gleichungen bezw.

$$d_\sigma = 1{,}13 \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{z}{\sigma} \cdot \beta \delta} \quad \ldots \ldots \quad (129)$$

und

$$d_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{z}{k} \cdot \beta \quad \ldots \ldots \quad (130)$$

Würden beide Stäbe einem zulässigen Drucke d ausgesetzt sein, so ist in Gleichungen (127) bis (130) d statt z und F_d statt F_z zu setzen.

Soll ein einteiliger Stab von der Zugspannung Z, der zulässigen Zugfestigkeit z und dem Querschnitt F_z mit zwei Zugstäben durch einen Schrauben- oder Nietbolzen von dem Durchmesser d_σ verbunden werden, s. Fig. 130, 131 und 132, 133, so ergibt sich entweder aus der Gleichung $2\,\pi \frac{d_\sigma^2}{4} \cdot \sigma = Z$ der Durchmesser des zweischnittigen Nietbolzens

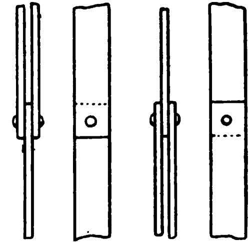


Fig. 130, 131, 132, 133.

$$d_\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{z}{\sigma} \cdot F_z} = 0{,}565 \sqrt{\frac{z}{\sigma} \cdot F_z} \quad \ldots \quad (131)$$

oder, wenn k wieder den zulässigen Druck auf die Innenfläche des Bolzenloches, δ die Dicke des einfachen Stabes und $\frac{\delta}{2}$ die Dicke jedes zweifachen Stabes bezeichnet, aus den Gleichungen $d_k \delta k = Z$ und $d_k \cdot 2 \frac{\delta}{2} \cdot k = Z$ der Bolzendurchmesser

$$d_k = \frac{Z}{k \delta} = \frac{z}{k} \cdot \frac{F_z}{\delta} = \frac{z}{k} \cdot \beta, \quad \ldots \ldots \quad (132)$$

von welchen beiden Werten wiederum der größere zu wählen ist.

Werden statt eines Bolzens deren n erfordert, so ergibt sich aus den Gleichungen (131) und (132) bezw.

$$d_\sigma = 0{,}565 \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{z}{\sigma} \cdot F_z} = 0{,}565 \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{z}{\sigma} \beta \delta} \quad \ldots \quad (133)$$

und

$$d_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{z}{k} \cdot \frac{F_z}{\delta} = \frac{1}{n} \cdot \frac{z}{k} \cdot \beta \quad \ldots \ldots \quad (134)$$

Werden beide Stäbe einem zulässigen Drucke d ausgesetzt, so ist in den Gleichungen (131) bis (134) wieder d statt z und F_d statt F_z zu setzen.

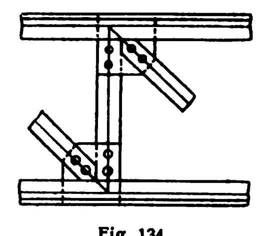


Fig. 134.

Die Größe und Gestalt der Verbindungsbleche an den Festpunkten, s. Fig. 134, ergibt sich aus der Zahl und Verteilung der Niete, mit welchen die Stäbe an die Gurten angeschlossen sind und aus den Abständen $1{,}5 \cdot d$ und $3\,d$, welche die Niete bezw. vom Rande und unter sich haben müssen. Würden z. B. je n Niete zum Anschluß der Stäbe an die Gurten erforderlich sein, so würden die Anschlußbleche außer ihrer Eingriffsweite in die Gurten in der Richtung sowohl der Vertikalen als Diagonalen die Länge

$$\lambda = 1{,}5\,d + (n - 1)\,3\,d + 1{,}5\,d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

haben müssen, während mindestens die gleiche Zahl der Niete diese Anschlußbleche mit den Gurten verbinden muß. Hierbei ist der Durchmesser der Nietbolzen bei einer Blechdicke δ gewöhnlich

$$d = 2\,\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

anzunehmen.

21. Ergänzung der durch die Befestigung geschwächten Stabquerschnitte.

Durch die zur Befestigung erforderlichen Nietlöcher von dem Durchmesser d erfahren die Stäbe von der Breite β eine Verminderung $(\beta - d)\,\delta$ ihres Nutzquerschnittes $\beta\,\delta$, welche mindestens diesem Querschnitte wieder zugesetzt werden muß. Dieser Zusatz beträgt also mindestens bei einem Nietloch $d\,\delta$ und bei n nebeneinander angeordneten Nietlöchern $n\,d\,\delta$. Der auf die angegebene Weise erzeugte Querschnitt bildet den Vollquerschnitt.

Während bei Zugstäben dieser Zusatz unbedingt erforderlich ist, kann derselbe bei Druckstäben, welche mittelst dicht schließender Bolzen, die also das Nietloch vollständig ausfüllen, ganz oder teilweise wegfallen.

In diesem Falle pflanzt sich der Druck durch den Nietbolzen so fort, als wenn das Nietloch vollkommen ausgefüllt, also eine Schwächung des Stabes überhaupt nicht vorhanden wäre.

22. Lager der Stabgefüge.

a) Bewegungsbedingungen der Lager.

Biegt ein Stabgefüge von der Stützweite 1 I $= l$, dem konstanten Trägheitsmoment t seines Querschnittes und dem Elasticitätsmodul E seines Stoffes unter der größten, gleichförmig über die ganze Stützweite

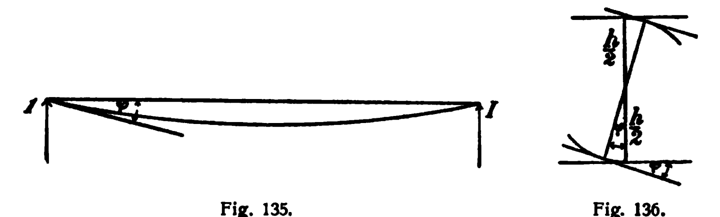


Fig. 135. Fig. 136.

verteilten Verkehrslast v durch, so entsteht an den Enden der Durchbiegungswinkel φ, s. Fig. 135 und 136, dessen Größe aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{v l^3}{24 E t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (137)$$

gefunden wird.

Bezeichnet F den Querschnitt einer Gurtung,
h die Höhe des Stabgefüges,
z die größte zulässige Stoffspannung,
e die Eigengewichtsbelastung der Längeneinheit,
v die veränderliche Belastung der Längeneinheit,
so kann annäherungsweise das Trägheitsmoment

$$t = \frac{F \cdot h^2}{2}$$

und hierin annähernd

$$F = \frac{(e + v) l^2}{8 z h}$$

gesetzt werden. Führt man diese Werte in Gleichung (137) ein, so erhält man

$$\operatorname{tang} \varphi = \tfrac{2}{3} \frac{z}{E} \cdot \frac{v}{(e + v)} \cdot \frac{l}{h} \quad \ldots\ldots \quad (138)$$

Diese Durchbiegung erfordert an den beiden Festpunkten 1 und I ein Lager, welches diese Durchbiegung in lotrechter Ebene gestattet, ohne den Druck des Stabgefüges auf die innere Kante der Unterlage zu verlegen. Dieser Bedingung entspricht das in verschiedener Form anzuordnende Kipplager, s. Fig. 137.

Wird das eine dieser Kipplager auf seiner Unterlage befestigt, woraus sich ein festes Kipplager ergibt, so erfordert die Längenveränderung des Stabgefüges bei Temperatur- und Belastungswechsel,

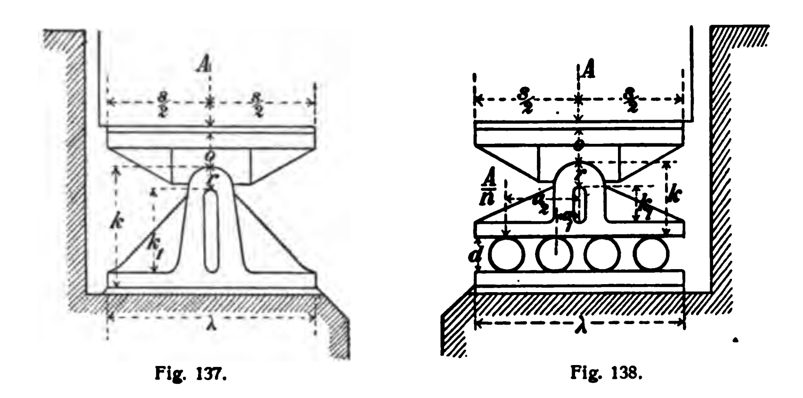


Fig. 137. Fig. 138.

daß das andere dieser Kipplager auf seiner Unterlage mittelst eines Rollstuhles verschieblich ist, also ein Kipprollenlager, s. Fig. 138, bildet.

Bezeichnet nun

τ den größten, der Brückenbaustelle entsprechenden Temperaturunterschied, welcher bei einer höchsten Temperatur von $+40^0$ C. und bei einer niedrigsten Temperatur von -20^0 C. zusammen 60^0 beträgt, so ergibt sich als mittlere Temperatur $+10^0$ C.

α die Ausdehnung des Schweißeisens, welche von $0-100^0$ C. für die Länge Eins $\alpha = \frac{1}{692} = 0{,}00145$ beträgt,

so ist die Gesamtverlängerung durch Temperaturwechsel

$$\lambda' = \alpha \tau l \quad \text{. . . . .} \quad (139)$$

und für die Trägerhöhe h, wenn φ die frühere Bedeutung hat, die Verschiebung durch die Belastung

$$\lambda'' = \frac{h}{2} \operatorname{tang} \varphi \quad \text{. . . . .} \quad (140)$$

also die Gesamtverschiebung

$$\Delta\lambda = \lambda' + 2\lambda'' = (\alpha \tau l + h \operatorname{tang} \varphi) \quad \text{. . .} \quad (141)$$

und, wenn für tang φ der obige Wert gesetzt wird,

$$\Delta\lambda = l\left(\alpha \tau + \frac{2 z \text{v}}{3(e + \text{v}) E}\right) \quad \text{. . . . . .} \quad (142)$$

b) Berechnung der Lager.

α. Abmessungen der Lagerplatten.

αα. Feste Lager.

Die Größe der Lagerplatte eines festen Lagers, s. Fig. 137, hängt, abgesehen von ihrer eigenen Festigkeit, von dem Drucke A eines Trägerendes und der Druckfestigkeit d des Pfeilermauerwerkes ab. Bezeichnet β die Breite und λ die Länge der Unterlagplatte, so ist

$$d\beta\lambda = A \quad \text{. . . . . (143)}$$

worin β nach der Breite b der unteren Trägergurtung zu bestimmen ist und im Mittel zu $\beta = 1{,}5b$ gesetzt werden kann, woraus sich die Länge der Unterlagplatte

$$\lambda = \frac{A}{1{,}5bd} \quad \text{. . . . . (144)}$$

ergibt.

Hierin kann d bei Mörtelmauerwerk zu 5—7 kg/cm², bei Cementmauerwerk zu 10—14 kg/cm² gesetzt werden. Nimmt man an, daß der Druck des Trägerendes in der Mitte der Lagerplatte angreift und die Lagerplatte auf die Entfernung λ_1 freiliegt, so ergibt sich deren Stärke

$$\delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{6\lambda_1}{\beta z}A}, \quad \text{. . . . . (145)}$$

worin z die größte zulässige Zugspannung des Gußeisens bezeichnet.

ββ. Bewegliche Lager.

Die Länge β_1 der Walzen wird nach der Breite β der unteren Lager, s. Fig. 139, und diese wie die Breite des festen Lagers bestimmt. Nimmt man die Länge der Walzen $\beta_1 = \frac{4}{5}\beta$ an, und bezeichnet deren Durchmesser mit d, deren Zahl mit n, die Tragfähigkeit der Flächeneinheit ihrer Horizontalprojektion mit w, so erhält man $n \cdot d \cdot \frac{4}{5}\beta \cdot w = A$ und hieraus deren Zahl

$$n = \frac{3A}{2w \cdot d \cdot \beta} \quad \text{. . . . . . . (146)}$$

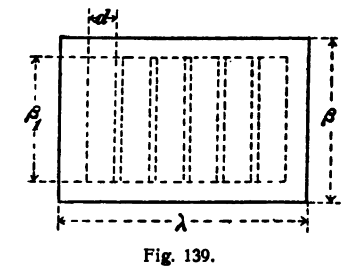


Fig. 139.

Hierin kann z. B. für eingleisige Brücken annähernd $d = 10$ cm $+ 0{,}1 \cdot l$, worin l deren Spannweite in m bedeutet, ferner für

gußeiserne Walzen $w = 0{,}02$ bis $0{,}024$ t/cm²
Gußstahlwalzen $w = 0{,}03$ bis $0{,}036$ t/cm²

gesetzt werden. Hieraus ergibt sich sodann die geringste Länge der Unterlagplatte

$$\lambda = nd + \Delta\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

welcher für die zwischen den Walzen erforderlichen Zwischenräume noch ein Zusatz von je 1 bis 2 cm zu machen ist. Für Walzensegmente oder Stelzen, s. Fig. 140, ist annähernd deren Höhe $d = 15 + 0{,}18\, l$ und deren Breite $d^1 = 0{,}5\, d$ anzunehmen.

d_1 d

Fig. 140.

Wenn jede der n gleichweit voneinander abstehenden Walzen von dem größten Auflagerdruck A den Druck $\frac{A}{n}$ aufnimmt, und die Walzen die Abstände $a_1, a_2 \ldots$ von der Mitte der Rollplatte haben, s. Fig. 138, so wirkt auf diese Stelle das Angriffsmoment

$$^aM = \frac{A}{n}(a_1 + a_2 + \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

Ist die Rollplatte massiv und besitzt die Breite β und die Höhe k in der Mitte, so ist wegen $^aM = z\frac{\beta k^2}{6}$, die erforderliche Höhe

$$k = \sqrt{\frac{6\,^aM}{z\beta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

Erhält die Rollplatte einen Hohlraum von der Höhe k_1, so ist wegen $^aM = \frac{z}{k} \cdot \frac{\beta\,(k^3 - k_1{}^3)}{6}$, die zulässige Höhe

$$k_1 = k\sqrt[3]{1 - \frac{6\,^aM}{z\beta k^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

β. Abmessungen der Kipplagerzapfen und Kipplagerstühle.

Nimmt man an, daß der Halbzapfen genau in die Pfanne paßt, s. Fig. 137, daß ferner der Druck auf denselben ebenso groß ist, als ein auf die halbe Oberfläche des Halbzapfens gleichmäßig verteilter Druck, und bezeichnet man mit λ die Länge, mit r den Halbmesser des Halbzapfens, mit w den zulässigen Druck der Flächeneinheit, während die früheren Bezeichnungen beihehalten werden, so ist $\frac{\pi \cdot r}{z}\lambda \cdot w = A$, mithin der Halbmesser des Halbzapfens

$$r = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{A}{w\lambda} = 0{,}636\,\frac{A}{w\lambda}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

worin für Gußeisen $w = 0{,}15$ bis $0{,}557$, i. M. $0{,}35$ t/cm² angenommen werden kann.

Erhält der Lagerstuhl des Kipplagers eine der Höhe des beweglichen Lagers entsprechende Höhe k und wird mit einem Hohlraum von der Höhe k_1 versehen, so ist für den größten Auflagerdruck A, wenn sich derselbe gleichförmig auf die Grundplatte von der Breite β und der Länge λ verteilt, wegen $\frac{A}{2} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{z}{k} \cdot \frac{\beta(k^3 - k_1^3)}{6}$ die zulässige Höhe der Aussparung

$$k_1 = k \sqrt[3]{1 - \frac{3A\lambda}{4\beta \cdot z \cdot k^2}} \quad \ldots \ldots \quad (152)$$

γ. Abmessungen der Kippplatten.

Erhält die Kippplatte die Breite β und die Länge s, bei einer Dicke δ in ihrer Mitte, so ist, wenn sich der größte Auflagerdruck gleichförmig auf ihre Oberfläche verteilt, wegen $\frac{A}{2} \cdot \frac{s}{4} = z \frac{\beta \delta^2}{6}$, die erforderliche Stärke der Kippplatte in deren Mitte

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3As}{z\beta}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (153)$$

In den vorstehenden Gleichungen kann für Gußeisen $z = 300$ kg/cm² gesetzt werden.

23. Kosten der Kraftübertragung. Kostenvergleiche.

Die Kosten eines Stabgefüges hängen außer von dem zeitigen Preise des Stabstoffes und der Arbeitskräfte vorzugsweise ab von der Länge seines Übertragungsweges und dem Rauminhalte seiner sämtlichen Teile.

Bedeuten $r_1 r_2 \cdots r_n$ die Rauminhalte dieser Stäbe, so beträgt der Rauminhalt des Stabgefüges

$$R = r_1 + r_2 + \cdots r_n \quad \ldots \ldots \quad (154)$$

und wenn mit γ das Gewicht der kubischen Einheit Stabstoff, mit K der Preis einer solchen bezeichnet wird, der Hauptkostenaufwand für das Stabgefüge

$$K = \gamma K R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (155)$$

Die Rauminhalte der einzelnen Stäbe ergeben sich aus den Produkten ihrer Längen $l_1 l_2 \cdots l_n$ in ihre ausgeführten Querschnitte $q_1 q_2 \cdots q_n$,

die letzteren aus dem Produkte der Quotienten ihrer größten zulässigen Anspruchnahme k in ihre größten Spannungen $S_1\ S_2 \cdots S_n$ mit dem Verhältnisse des wirklichen Gewichtes zum theoretischen Gewichte.

Zur Beurteilung des wirtschaftlichen Wertes je zweier Stabgefüge genügt in der Regel schon der Vergleich ihrer aus den Längsspannungen und Anspruchnahmen ihrer Teile abgeleiteten theoretischen Rauminhalte, da die aus der Erfahrung zu entnehmenden Faktoren, womit die theoretisch bestimmten Rauminhalte zu multiplicieren sind, um zu den wirklichen Rauminhalten des Stabgefüges überzugehen, unter übrigens gleichen oder ähnlichen Umständen dieselben oder fast dieselben bleiben.

Mit Bezug auf die oben gewählten Beziehungen sind also

$$r_1 = l_1 q_1 \quad r_2 = l_2 q_2 \quad \ldots \quad r_n = l_n q_n \ldots \quad (156)$$

worin wieder

$$q_1 = \frac{S_1}{k} \quad q_2 = \frac{S_2}{k} \quad \ldots \quad q_n = \frac{S_n}{k} \ldots \quad (157)$$

Die Spannungen S können nun entweder Zugspannungen $Z_1 Z_2 \cdots Z_n$ oder Druckspannungen $D_1\ D_2 \cdots D_n$ mit den entsprechenden größten zulässigen Anspruchnahmen z und d sein. Führt man diese Werte in die Gleichungen 156 und 157 ein, so erhält man für gezogene Stäbe

$$r_1^z = l_1 \frac{Z_1}{z} \quad r_2^z = l_2 \frac{Z_2}{z} \quad \ldots \quad r_n^z = l_n \frac{Z_n}{z} \quad \ldots \quad (158)$$

für gedrückte Stäbe

$$r_1^d = l_1 \frac{D_1}{d} \quad r_2^d = l_2 \frac{D_2}{d} \ldots \quad r_n^d = l_n \frac{D_n}{d} \ldots \quad (159)$$

also für gezogene Stabreihen

$$R^z = \frac{1}{z}(l_1 Z_1 + l_2 Z_2 + \ldots l_n Z_n) \ldots \quad (160)$$

und für gedrückte Stabreihen

$$R^d = \frac{1}{d}(l_1 D_1 + l_2 D_2 + \ldots l_n D_n) \ldots \quad (161)$$

Zu den gezogenen Stabreihen gehören die aufeinander folgenden Teile der Zuggurten und die Zugstäbe, zu den gedrückten Stabreihen die einzelnen Stabreihen der aufeinander folgenden Teile der Druckgurten und die Druckstäbe.

Erhalten die Zuggurtenstücke oder die Zugstäbe gleiche Längen, so wird $l_1 = l_2 = \ldots l_n = l$ und Gleichung (160) geht über in

$$R^z = \frac{l}{z}(Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n) \ldots \quad (162)$$

Werden die Druckgurtenstücke oder die Druckstäbe gleich lang, so geht Gleichung (161) über in

$$R^d = \frac{l}{d}(D_1 + D_2 + \quad . \quad . \quad . \quad D_n) \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(163)}$$

Die Gleichungen (162) und (163) sind dann für Gurtstücke mit den Bezeichnungen R_g^z und R_g^d und Stäbe mit den Bezeichnungen R_s^z und R_s^d getrennt zu benutzen und man erhält den Rauminhalt des ganzen Stabgefüges

$$R = R_g^z + R_g^d + R_s^z + R_s^d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(164)}$$

Ist das Stabgefüge zu seiner Mitte symmetrisch, so genügt die Raumberechnung seiner Hälfte $\frac{R}{2}$ und die Ermittelung des ganzen Rauminhaltes durch deren Verdoppelung.

Um auf diese Weise die Kosten des unter 15 behandelten einfachen rechteckigen Stabgefüges mit sechs gleichen Feldern von je 10 m Weite, je 10 m Höhe und je 14,14 m Länge der Diagonalen annähernd zu berechnen, worin die Werte $d = 800$ und $z = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ angenommen werden sollen, ergeben die Gleichungen (163) und (162) bezw. die Rauminhalte der Gurten

$$R_g^d = 2 \cdot \frac{10 \cdot 100}{800}(20000 + 32000 + 36000) = 22 \cdot 10^4 \text{ cm}^3 = 0{,}22 \text{ m}^3$$

$$R_g^z = 2 \cdot \frac{10 \cdot 100}{1000}(0 + 20000 + 32000) = 104 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 0{,}104 \text{ m}^3$$

Die Rauminhalte der Stäbe ergeben sich bei den größten einseitigen Belastungen aus den Gleichungen der größten Druckspannungen der Vertikalen

$$D_s = -\left[\frac{e}{2}(n - 1 - 2m) + \frac{v}{2n}(n - 1 - m)(n - m)\right] =$$
$$-[1000(5 - 2m) + 500(5 - m)(6 - m)]$$

und der größten Zugspannungen der Diagonalen

$$Z_s = \frac{d}{h}\left[\frac{e}{2}(n + 1 - 2m) + \frac{v}{2n} m (m - 1)\right] =$$
$$\frac{14{,}14}{10}[1000(7 - 2m) + 500m(m - 1)]$$

Werden in beiden Gleichungen die aufeinanderfolgenden Werte $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ und $m = 4$ eingesetzt, so erhält man bezw. die Druckspannungen

$$D_0 = 20000,\ D_1 = 13000,\ D_2 = 7000,\ D_3 = 2000 \text{ kg},$$

die Zugspannungen

$$Z_1 = 28280,\ Z_2 = 18382,\ Z_3 = 9898,\ Z_4 = 2828 \text{ kg}.$$

Setzt man diese Zahlenwerte in die Gleichungen (163) und (162) ein, so ergibt sich

$$R_s^d = 2 \cdot \frac{10 \cdot 100}{800} (20000 + 13000 + 7000 + 2000) = 105 \cdot 10^3$$

$$= 0{,}105 \text{ m}^3$$

$$R_s^z = 2 \cdot \frac{14{,}14 \cdot 100}{1000} (28280 + 18382 + 9898 + 2828) = 0{,}168 \text{ m}^3$$

mithin der Rauminhalt des ganzen rechteckigen Stabgefüges aus Gleichung (164)

$$R_r = 0{,}22 + 0{,}104 + 0{,}105 + 0{,}168 = 0{,}597 \text{ m}^3.$$

Vergleicht man hiermit unter übrigens gleichen Umständen ein parabolisches Stabgefüge mit $2n = 6$ gleichen Feldern von je $\lambda = 10$ m Weite, von $h_n = 10$ m Höhe in der Mitte und denselben Belastungen der unteren Festpunkte $e = 2000$ kg durch Eigengewicht und $v = 6000$ kg durch Verkehrsgewicht, also 8000 kg Gesamtgewicht, so erhält man zunächst allgemein die Spannungen im gedrückten Obergurte mit den Längen o_m seiner nacheinanderfolgenden Stücke

$$D_g = -\frac{n^2 (e + v)}{2 h_n} o_m = -\frac{3^2 \cdot 8000}{2 \cdot 10} o_m = -3600\, o_m,$$

im gezogenen Untergurt

$$Z_g = \frac{n^2 (e + v)}{2 h_n} \lambda = \frac{3^2 \cdot 8000}{2 \cdot 10} 10 = 36000 \text{ kg},$$

in den lotrechten Stäben bei voller Belastung.

$$D_s = e + v = 8000 \text{ kg}.$$

In den gezogenen gekreuzten Stäben mit ihren aufeinanderfolgenden Längen d_m

$$Z_s = \frac{n v}{4 h_n} d_m = \frac{3 \cdot 6000}{4 \cdot 10} d_m = 450\, d_m$$

Werden noch die Längen der Obergurtstücke $o_1 = 11{,}44$, $o_2 = 10{,}54$ und $o_3 = 10{,}07$ m, die Längen der Vertikalen $v_1 = 5{,}56$, $v_2 = 8{,}89$, $v_3 = 10$ m, ferner die Längen der geneigten Stäbe $d_2 = 11{,}44$, $d_3 = 13{,}38$, $d_4 = 14{,}14$ m eingeführt, so erhält man

$$D_g^1 = 41184 \text{ kg},\quad D_g^2 = 37944 \text{ kg},\quad D_g^3 = 36252 \text{ kg}$$
$$D_s^1 = 8000 \text{ kg},\quad D_s^2 = 8000 \text{ kg},\quad D_s^3 = 8000 \text{ kg}$$
$$Z_s^2 = 5148 \text{ kg},\quad Z_s^3 = 6021 \text{ kg},\quad Z_s^4 = 6363 \text{ kg}.$$

Aus Gleichung (161) und (162) ergibt sich dann bezw.

$$R_g^d = 2 \cdot \frac{100}{800} (11{,}44 \cdot 41\,184 + 10{,}54 \cdot 37\,944 + 10{,}07 \cdot 36\,252)$$

$$= 309\,033 \text{ cm}^3 = 0{,}309 \text{ m}^3$$

$$R_g^z = 2 \cdot \frac{10 \cdot 100}{1000} \cdot 3 \cdot 36\,000 = 216\,000 \text{ cm}^3 = 0{,}216 \text{ m}^3$$

$$R_s^d = 2 \cdot \frac{100}{1000} \cdot 8000\,(5{,}56 + 8{,}89 + 5{,}00) = 31\,120 \text{ cm}^3 = 0{,}03 \text{ m}^3$$

$$R_s^z = 2 \cdot \frac{100}{1000} (11{,}44 \cdot 5148 + 13{,}38 \cdot 6021 + 14{,}14 \cdot 6363 + 13{,}38 \cdot 6021)$$

$$= 61\,998 \text{ cm}^3 = 0{,}06 \text{ m}^3$$

mithin der Rauminhalt des ganzen parabolischen Stabgefüges aus Gleichung (164)

$$R_p = 0{,}309 + 0{,}216 + 0{,}03 + 0{,}06 = 0{,}615 \text{ m}^3$$

woraus durch Division:

$$\frac{R_r}{R_p} = \frac{0{,}597}{0{,}615} = 0{,}97.$$

Die Rauminhalte des betrachteten rechteckigen und parabolischen Stabgefüges verhalten sich also annähernd wie 97 : 100. Aus dem hier angestellten Vergleiche zweier Stabgefüge folgt, daß der Rauminhalt des rechteckigen Stabgefüges kleiner ist als derjenige des parabolischen Stabgefüges, obwohl der Übertragungsweg des ersteren größer ist als derjenige des letzteren.

Nimmt man an, daß beide Stabgefüge aus Flußeisen mit dem Gewichte $\gamma = 7850 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ herzustellen wären, so würden ihre Gewichte bezw. $G_r = 0{,}597 \cdot 7850$ = rund 4545 kg und $G_p = 0{,}615 \cdot 7850$ = rund 4828 kg betragen, folglich wäre das rechteckige Stabgefüge um 3 % leichter herzustellen als das parabolische.

Auf ähnlichem Wege lassen sich die Gewichtsvergleiche auch bei anderen Stabgefügen anstellen und deren Gewichte sich mit Bezug auf die Länge ihrer Übertragungswege vergleichen.

24. Schönheitsform der Kraftübertragung in Baugefügen.

Bei der Herstellung von Baugefügen kommt allgemein zunächst deren Zweckmäßigkeit und deren Kostenaufwand in Betracht, doch stellen manche Gebiete des Bauwesens, insbesondere der Hochbau und in zahlreichen Fällen der Brückenbau auch Forderungen an eine gefällige

äußere Erscheinung des Bauwerkes. Da es sich bei jedem Bauwerk um die Übertragung von freiwirkenden Kräften (Lasten) auf feste Stützpunkte handelt; so spielt hier, von architektonischen Stilgesetzen abgesehen, der Übertragungsweg eine Hauptrolle. Je deutlicher sich dieser Übertragungsweg dem Auge darstellt, um so verständlicher, um so gefälliger wird der Beschauer das Bauwerk finden. Unter allen Baugefügen nun, welche eine Kraft (Last) übertragen, lassen sich äußerlich zwei Hauptgruppen unterscheiden: die aus geradlinigen und die aus bogenförmigen Teilen zusammengesetzten. Dieselben hängen wieder von dem Baustoff, aus welchem sie bestehen, und von der gegenseitigen Lage der Baugefüge und ihrer Stützpunkte ab. Kommen bei den geradlinigen Bauteilen und Baugefügen Holz, Eisen und Stein in Betracht, so werden die bogenförmigen Bauteile und Baugefüge in der Gegenwart vorwiegend aus Stein oder aus Eisen, in wenigen Fällen aus Holz hergestellt. Was die gegenseitige Lage der Baugefüge und ihrer Stützpunkte betrifft, so unterscheidet man die Sprengwerke, wenn die Lasten über, die Hängwerke, wenn die Lasten unter und die Hängsprengwerke, wenn die Lasten zum Teil über, zum Teil unter den Baugefügen wirken. Werden diese drei Arten der Kraftübertragung aus bogenförmigen Hauptteilen gebildet, so unterscheidet man die Bogensprengwerke, die Bogenhängwerke und die Bogenhängsprengwerke. Die bogenförmigen Bauteile unterliegen entweder nur einem Druck, wie die Stein- oder Betongewölbe, oder einem Zug, wie die Ketten oder Kabel der Hängbrücken oder teils einem Druck, teils einem Zug, wie die eisernen Fischträger. Die Bogen endlich zeigen je nach dem Zwecke und dem Orte der Baugefüge die Form von Halbkreisen, Kreissegmenten, Korbbogen, Spitzbogen, Ellipsen und quadratische Parabeln oder Teile von Hyperbeln.

Über den geradlinigen Baugefügen mit rechteckiger Grundform, s. Fig. 141, geben die lotrechten Zugteile (Hängsäulen, Hängeisen) und Druckteile (Pfosten, Säulen, Gewände) die Form des Lastübertragungsweges unmittelbar wieder, während die einer Biegung unterworfenen wagrechten Bauteile (Steinbalken, Stürze, I-Eisen, Holzbalken) den Lastübertragungsweg nur mittelbar, also nicht sofort verständlich wiedergeben. Alle reckteckigen, mit rechtwinkligen oder gleichschenkligen Dreiecken ausgesteiften Baugefüge, bei welchen der Lastübertragungsweg ein mehr oder minder verwickelter, also meist unverständlicher ist, können auf den Beschauer einen befriedigenden

Fig. 141.

Eindruck nicht hervorbringen, wenn man auch, wie u. a. bei der Brücke über den Donaukanal zwischen Wien und Stadtlau den Versuch gemacht hat, durch die Formen und Abmessungen der Gurten und Stäbe, die von der Mitte nach den Stützpunkten hin zunehmenden Spannungen der Stäbe und die von den Enden nach der Mitte hin zunehmenden Spannungen der Gurten für den Beschauer kenntlich, also den Übertragungsweg deutlicher zu machen. Am wenigsten befriedigend erscheinen den neueren großmaschigen Fachwerkbrücken gegenüber die Träger der älteren engmaschigen Gitterbrücken.

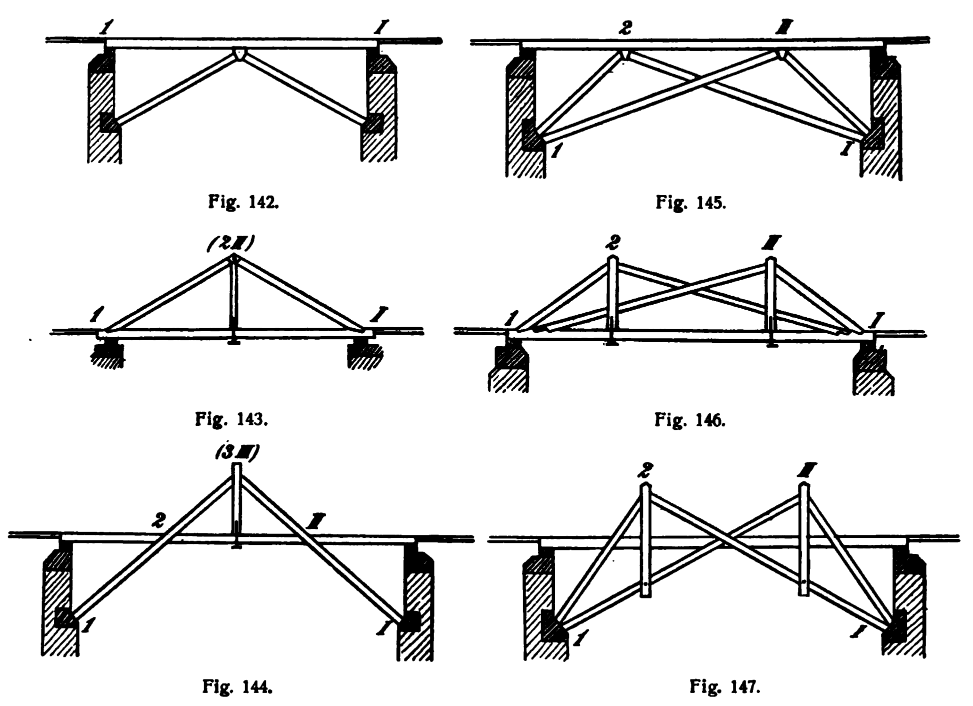


Fig. 142. Fig. 145.

Fig. 143. Fig. 146.

Fig. 144. Fig. 147.

Von den Baugefügen mit dreieckiger Grundform geben die Sprengwerke, Fig. 142 u. 145, unmittelbar, die Hängwerke, Fig. 143 u. 146, und Hängsprengwerke, Fig. 144 u. 147, den Lastübertragungsweg nur mittelbar wieder. Hiernach würden die Baugefüge 142 und 145 als die gefälligsten erscheinen. Das Gleiche würde von denselben Baugefügen gelten, wenn sie umgekehrt, und zwar so angewendet würden, daß ihre geneigten Teile statt auf Druck auf Zug, und ihre lotrechten Teile statt auf Zug auf Druck beansprucht werden. Die dreieckigen Baugefüge (versteifte Satteldachbinder) Fig. 148, 149, 150 geben den Übertragungsweg der freien Lasten auf die Stützpunkte 1 I nur mittelbar, und zwar in ähn-

licher Weise wieder und würden deshalb hinsichtlich der äußeren Erscheinung nahezu gleichwertig sein.

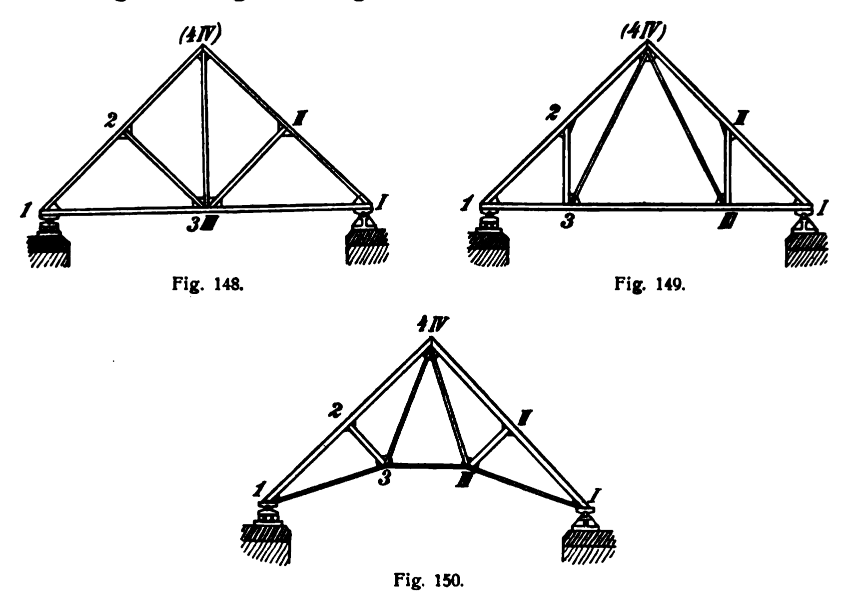


Fig. 148. Fig. 149.

Fig. 150.

Ein besonders gefälliges Äußere zeigen diejenigen bogenförmigen Baugefüge, welche den Übertragungsweg der Lasten auf die Stützpunkte

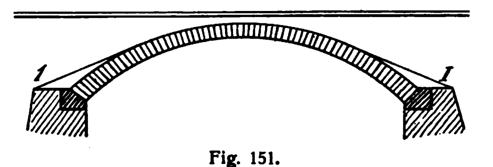


Fig. 151.

am deutlichsten darstellen. Hierzu gehören in erster Linie alle Gewölbe, welche die Form ihrer Stützlinie wiedergeben, s. Fig. 151, und

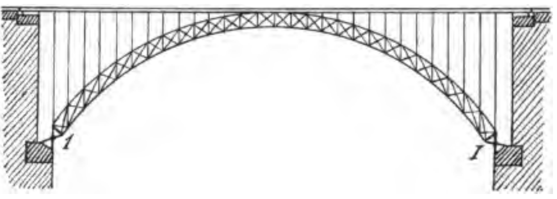


Fig. 152.

die eisernen Bogensprengwerke, s. Fig. 152, mit Gelenken und ohne Gelenke, in zweiter Linie die eisernen Bogenhängwerke und Bogenhängsprengwerke, s. Fig. 153 u. 154.

Unter allen Bogenhängwerken verdienen wieder diejenigen den Vorzug, deren Bogen sich auf Gelenke stützen und so gegliedert sind, daß sie die ihnen durch lotrechte Zug- oder Druckstäbe zugeführten

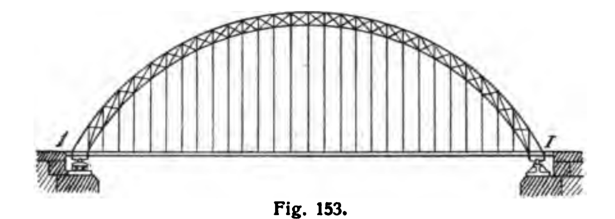


Fig. 153.

Lasten allein übertragen. Man könnte einwenden, das Stabwerk der zweiteiligen Bogen vermittele doch eine mehr oder minder verwickelte

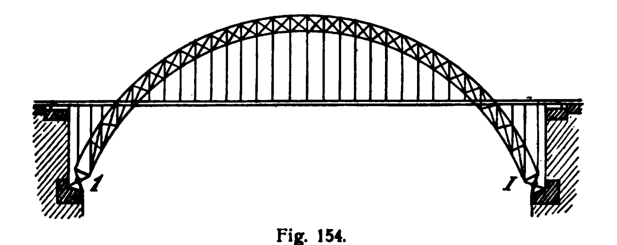


Fig. 154.

Übertragung der Lasten auf die Stützen, jedoch tritt hier die Form dieser letzteren Übertragung gegen diejenige des Bogens für den Beschauer fast ganz zurück.

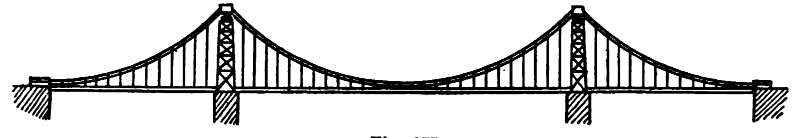


Fig. 155.

Auch die Bogenhängwerke, s. Fig. 155, welche dem Übertragungswege der Lasten über mehr oder minder hohe Pfeiler bis zu den Verankerungsstellen entsprechen, gewähren ein befriedigendes, wenn auch wegen des verwickelteren Übertragungsweges nicht so unmittelbar günstig auf den Beschauer wirkendes Äußere, wie die Bogensprengwerke.

Schließlich sind noch diejenigen zusammengesetzten bogenförmigen Baugefüge zu erwähnen, bei welchen je ein auf Druck beanspruchter mit je einem auf Zug beanspruchten Bogen an den Enden verbunden

ist, während beide Bogen durch lotrechte Stäbe zu einem Ganzen vereinigt sind, s. Fig. 156. Auch hier beeinträchtigt der zusammengesetzte, verschiedene Übertragungsweg der Lasten, wozu noch die besondere

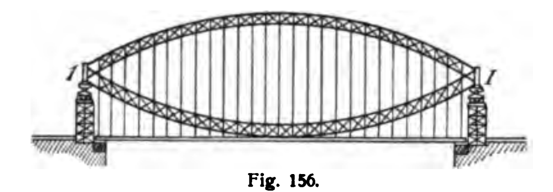
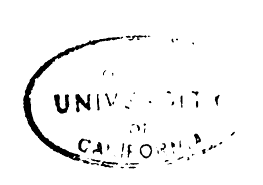


Fig. 156.

Belastungsebene (z. B. Brückenbahn) über, unter, oder teils über, teils unter dem Baugefüge hinzukommt, den unmittelbar verständlichen Eindruck, welchen die äußere Erscheinung dieses Baugefüges auf den Beschauer macht.



Uebertragung von Längs- und Querkr

Fig. 3. Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 3. Querschnitt und Ansicht von links.

Fig. 4. Ansicht von rechts.

Fig. 1.

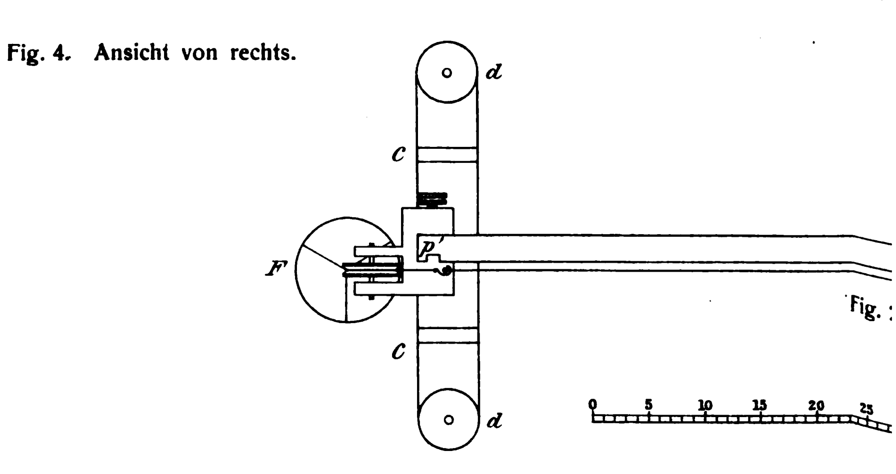


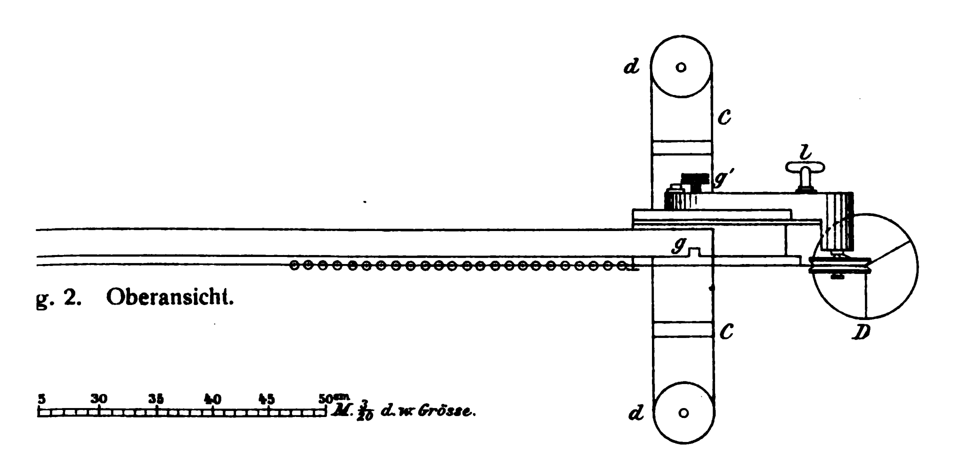
Fig. :

Entworfen von F. Heinzerling.

Verlag von Carl Scho

räften in Stäben auf deren Stützpunkte.

1. Vorderansicht.

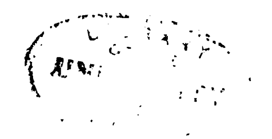


g. 2. Oberansicht.

choltze, Leipzig.

Gezeichnet von A. Striepling.





Form und Richtung der Uebertragung von Kräf

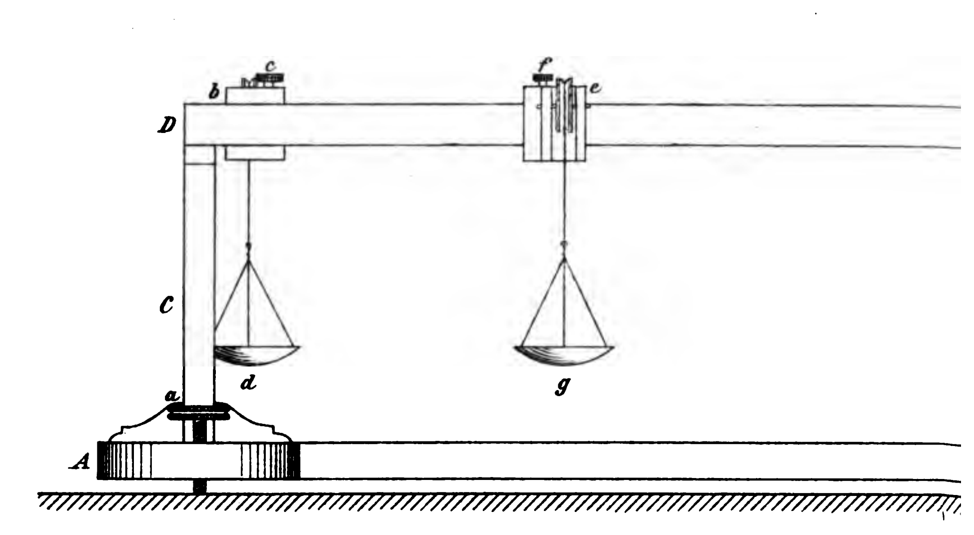


Fig. 1. Vorderansicht.

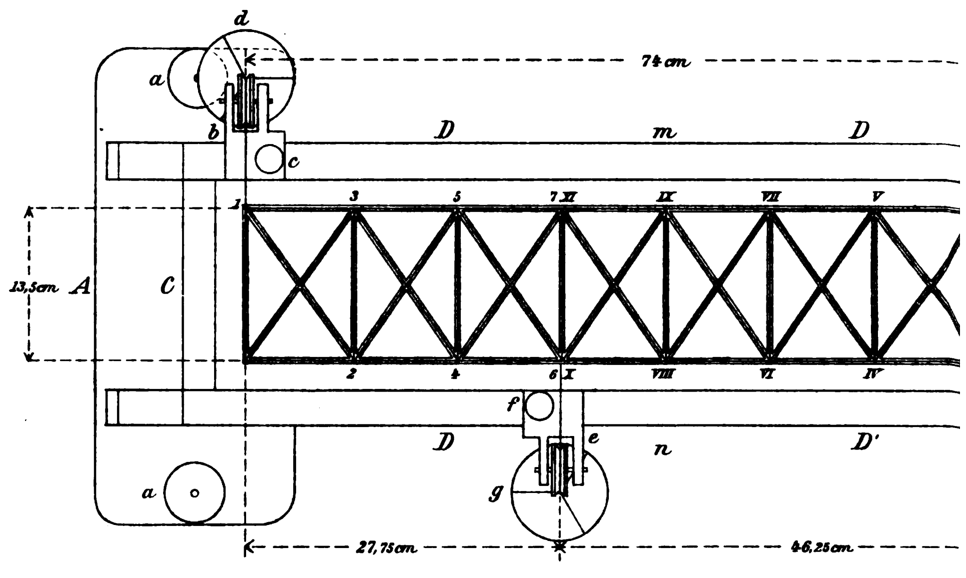


Fig. 2. Oberansicht.

0 5 10 15 20 25 30 35 40 45

Entworfen von F. Heinzerling.

Verlag von Carl Sch

räften in Stabgefügen auf deren Stützpunkte.

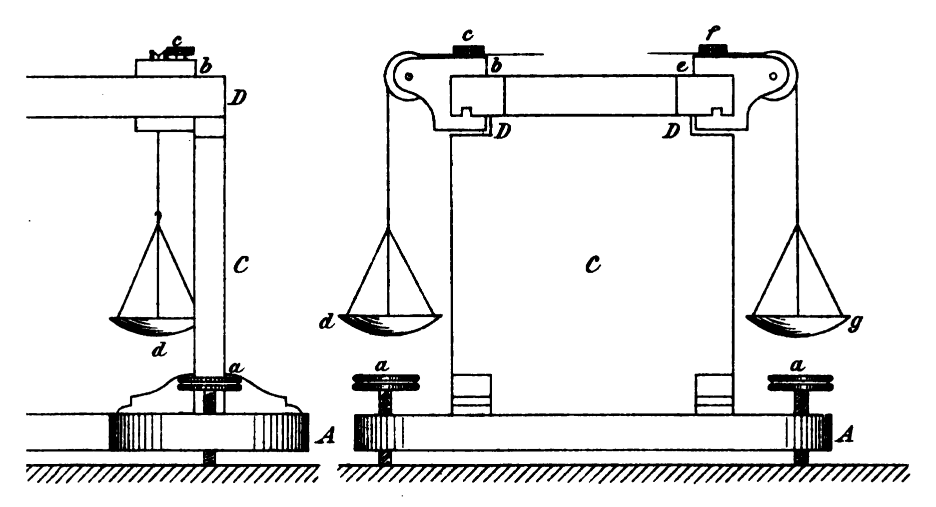


Fig. 3. Seitenansicht.

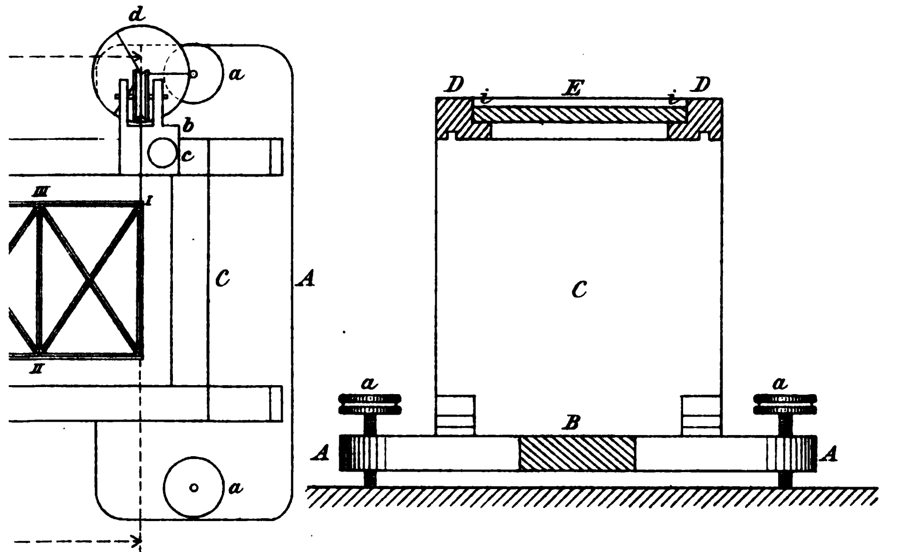


Fig. 4. Querschnitt nach m n.

50 cm M. $\frac{1}{20}$ d. w. Grösse.

ltze, Leipzig.

Gezeichnet von A. Striepling.





Vergleich rechnerisch und zeichnerisc

Fig. 1. Zeichnerisch-

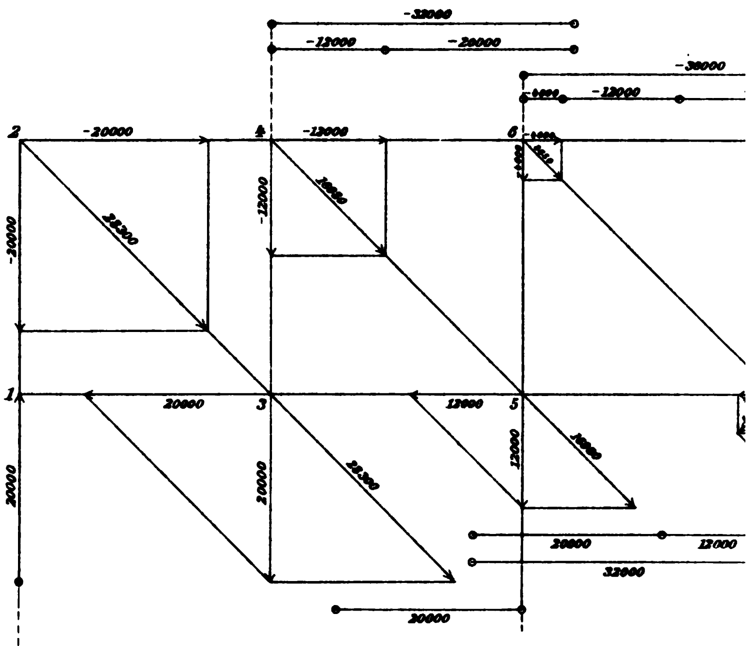


Fig. 2. Zeichnerisch-statische Ermittelung.

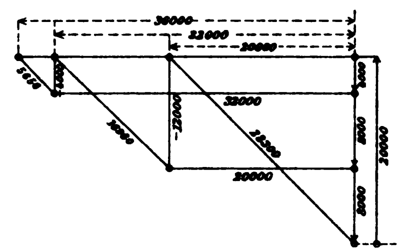
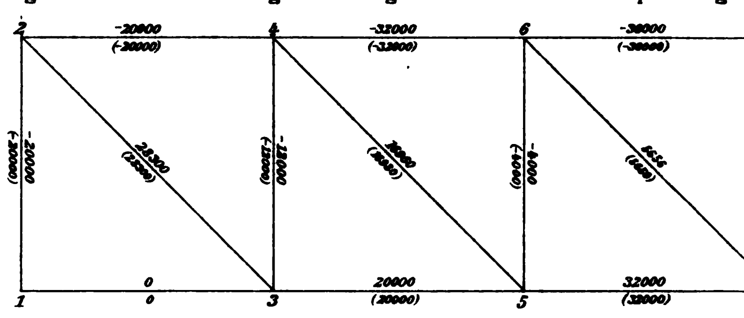
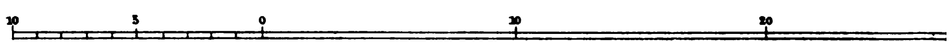


Fig. 3. Zusammenstellung der in Fig. 1 und 2 ermittelten Spannunge



Maßstab der Längen 1 : 300 d. w. Größe.



h ermittelter Spannungen in Stabgefügen.

lynamische Ermittelung.

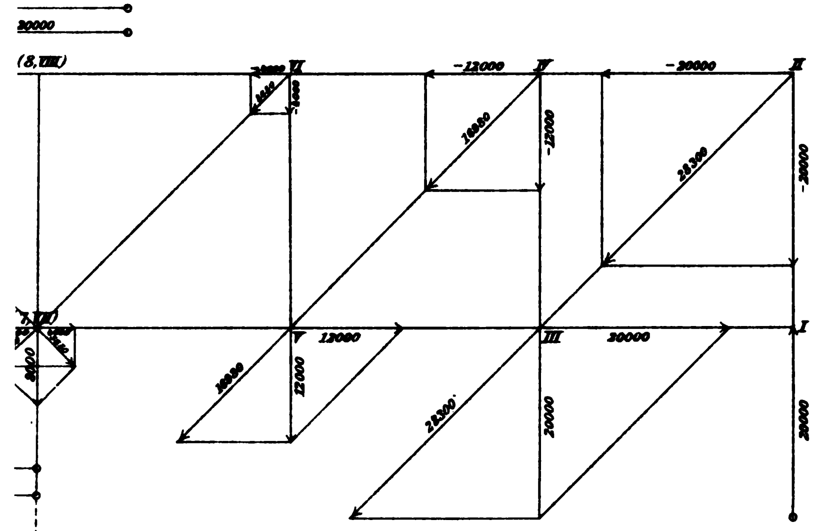


Fig. 4. Zusammenstellung der rechnerisch und zeichnerisch ermittelten Spannungen.

Bezeichnung der Stäbe		rechnerisch	zeichnerisch	
			statisch	dynamisch
Obergurt	24	-20000	-20000	-20000 = -20000
	46	-32000	-32000	-20000-12000 = -32000
	68	-36000	-36000	-20000-12000-4000 = -36000
Untergurt	13	0	0	0 = 0
	35	20000	20000	20000 = 20000
	57	33000	32000	20000+12000 = 32000
Diagonalen	23	28284	28300	28300
	45	16970,4	16960	16980
	67	5656,8	5656	5650
Vertikalen	12	-20000	-20000	-20000
	34	-12000	-12000	-12000
	56	-4000	-4000	-4000
	78	0	0	0

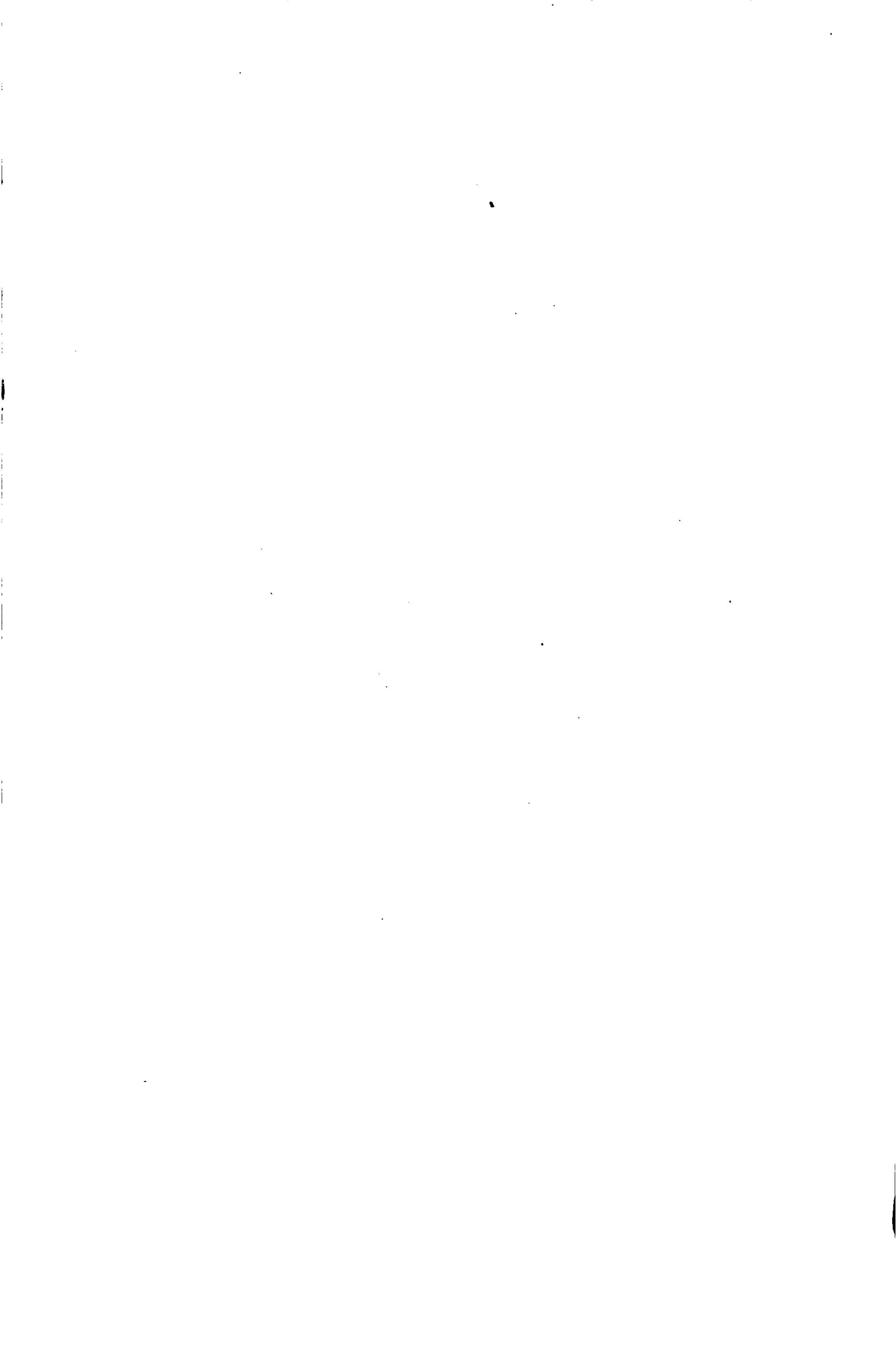
Maßstab der Kräfte 1 cm = 8000 kg.

10000 0 10000 50000 kg.

Scholtze, Leipzig.

Gezeichnet von A. Striepling.








131733
TG260
H4

